Matrices à signes alternés, modèle de la glace et boucles denses sur réseau

Anh Minh NGUYEN

8 Septembre 2003

1 Définitions

Définition 1.1 *Une* matrice à signes alternés *(ASM) de taille n est une matrice carrée de taille n, composée de* 0, 1, *et* -1, *telle que:*
- *chaque colonne et chaque ligne a au moins un élément non-nul*
- *le premier et le dernier éléments non-nuls de chaque ligne et chaque colonne sont égaux à* 1
- *les signes des éléments non-nuls alternent.*

Exemples:

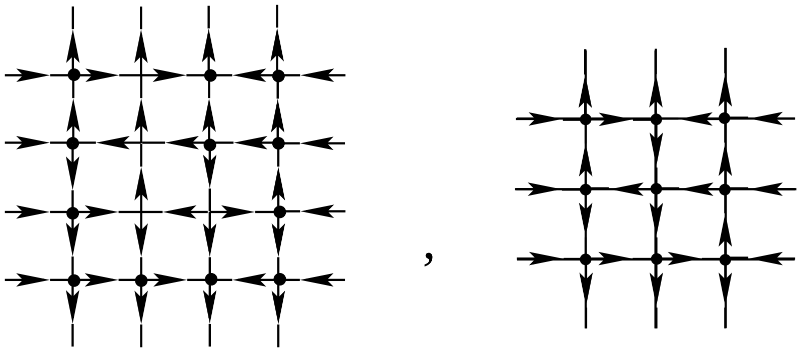
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 1.2 *Une* configuration de glace carrée *de taille n est une orientation sur les arêtes d'une grille carrée de côté n, telle que chaque sommet a exactement deux arêtes entrantes et deux arêtes sortantes.*

Le nom de 'glace carrée' provient d'un modèle de répartition bi-dimensionnelle de molécules de glace (chaque sommet représentant un atome d'oxygène et les arêtes entrantes les atomes d'hydrogène qui lui sont attachés).

Il existe une bijection entre les matrices à signes alternés de taille n et les configurations de glace carrée de taille n telles que les arêtes horizontales en dehors du carré pointent vers celui-ci, tandis que les arêtes verticales soient orientées dans la direction opposée (condition aux bords (C))

Exemple: Voici les configurations de glace carrée correspondant aux ASM de l'exemple précédent.



Définition 1.3 *On considère* $2n$ *points* $(x_i)_{i=1\ldots 2n}$ *distincts d'un cercle. Une* configuration d'arches *est une classe d'homéomorphie d'une famille de* n *chemins du disque, disjoints d'extrémités les points* x_i.

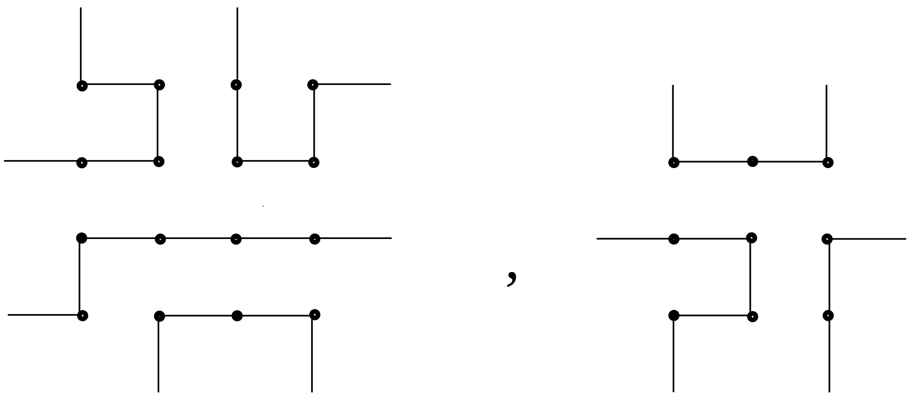
Remarque: le nombre de configurations de n arches est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan.

On peut transformer une configuration de glace carrée en une configuration d'arches en pratiquant l'opération suivante:

- On assigne au point (i,j) (en coordonnées matricielles) le signe $(-1)^{i+j}$
- on ne garde que les arêtes orientées d'un sommet positif vers un sommet négatif

On obtient ainsi un graphe à n^2+4n sommets tel que chaque sommet intérieur a exactement deux arêtes. On nomme de tels graphes *Fully Packed Loops* (FPL) .

Exemple: Voici les FPL correspondant aux configurations de glace carrée de l'exemple précédent.



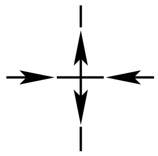
On obtient ainsi n chemins disjoints. Il suffit de déformer le carré contenant les extrémités de ceux-ci en un cercle pour obtenir un configuration d'arches.

Il ne s'agit cependant pas d'une bijection.

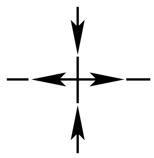
2 Des ASM vers la glace carrée

Démontrons l'existence d'une bijection entre l'ensemble des ASM de taille n et les configurations de glace carrée. La bijection utilisée est la suivante: l'élément (i,j) de la matrice est déterminé par l'orientation des arêtes autour du sommet intérieur (i,j) de la configuration de glace carrée:

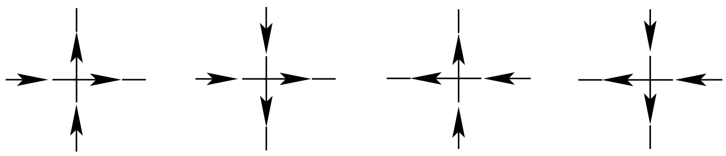
– $+1$ correspond à:



– -1 correspond à:



– 0 correspond à:



2.1 Montrons qu'il s'agit bien d'une application des configurations de glace carrée respectant (C) vers les ASM

Par exemple, considérons les arêtes d'une ligne. Les éléments non-nuls correspondent aux sommets où les arêtes changent d'orientation - c'est-à-dire, les sommets dont les arêtes horizontales sont ou bien toutes deux entrantes, ou bien toutes deux sortantes. On ne peut bien sûr pas se trouver consécutivement deux fois dans le même cas: cela implique l'alternance des signes. De plus, les conditions aux bords assurent:

– qu'il y aura bien un changement d'orientation (et donc un élément non-nul)

– que le premier et le dernier éléments sont des 1 (arêtes horizontales entrantes).

Le même argument pour les colonnes montre que l'application produit bien une matrice à signes alternés.

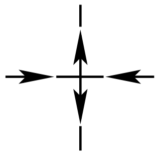
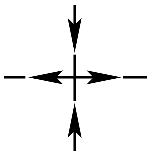
2.2 Montrons la bijectivité

On considère l'application suivante, et on montre qu'elle est l'application inverse.

Soit M une ASM. On lui associe la configuration de glace carrée suivante:

– (C) nous procure déjà l'orientation des arêtes extérieures

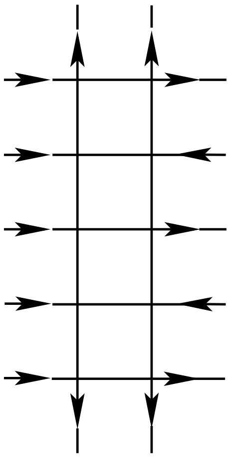
– on complète la configuration en plaçant les changements d'orientation aux éléments non-nuls de M.

Cette définition est bien cohérente : il découle aisément de la définition des ASM que chaque ligne et chaque colonne de la matrice a un nombre impair d'éléments non-nuls, et donc des orientations différentes sur les bords aux extrémités des lignes et colonnes. En fait, les conditions aux bords imposent qu'au éléments $+1$ correspondent des sommets de type  et aux éléments -1 des sommets de type .

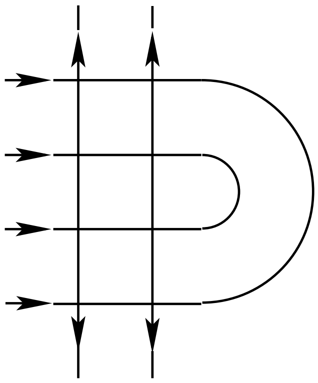
On voit facilement que cette application est l'inverse de celle qui transforme les ASM en glace carrée, et on a donc bien affaire à une bijection.

2.3 Autres conditions aux bords

Dans [1], Greg Kuperberg expose d'autres bijections, faisant correspondre certaines configurations de glace à des classes d'ASM, invariantes par rapport à des symétries. Par exemple,



et



correspondent, respectivement, aux ASM invariantes par symétrie par rapport à leur médiane verticale et aux ASM invariante par rapport à leur centre.

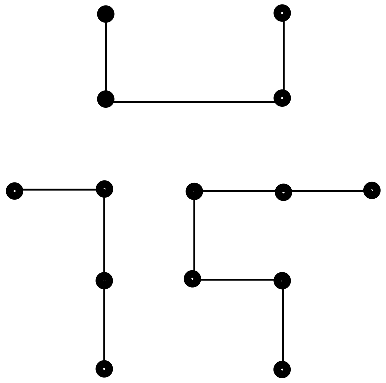
3 De la glace carrée vers les configuration d'arches

Il y a clairement bijection entre les configurations de glace carrée et les FPL. Désormais, $\mathcal{A}_n$ pourra désigner aussi bien l'ensemble des ASM de taille n que celui des configurations de glace carrée ou des FPL associées.

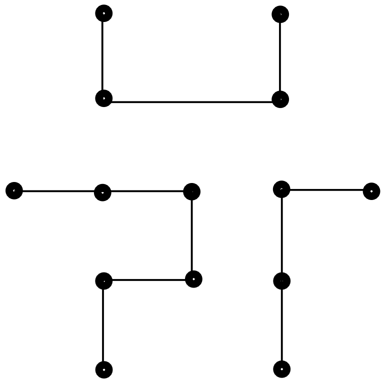
Remarque: D. Zeilberger [2] a prouvé que son cardinal A_n est:

$$A_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{n+j}$$

Cependant, deux FPL peuvent résulter en une même configuration d'arches. Par exemple,



et



Notation: Soit π une configuration de n arches. On notera $\mathcal{A}_n(\pi)$ l'ensemble des antécédents de π, et $A_n(\pi)$ son cardinal.

3.1 Invariance par action de D_{2n}

En supposant les x_i répartis régulièrement, le groupe dièdral D_{2n} agit de manière évidente sur les configurations de n arches, et Benjamin Wieland [3] a montré que A_n est invariant par cette action.

Le corps de sa démonstration est l'explicitation d'une bijection de $\mathcal{A}_n$ sur lui-même telle que l'image de $\mathcal{A}_n(\pi)$ est $\mathcal{A}_n(\pi')$, où π' est l'image de π par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

Soit un carré élémentaire (carré dont les côtés sont des arêtes de la grille) S. Du point de vue de la glace carrée, on définit $g_S : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$, transformant les configurations de la manière suivante:

- g_S ne change pas les arêtes en dehors de S
- si parmi les côtés de S, il y a deux arêtes dirigées vers un même sommet, les arêtes de S sont aussi laissées invariantes
- sinon - ce qui veut dire que chaque sommet voit exactement une arête de S orientée vers lui - g_S inverse l'orientation des quatre côtés de S.

Donnons à chaque carré élémentaire un signe - par exemple, celui du sommet sud-ouest. Les carrés de même signe n'ont aucun côté commun, donc les g_S induites commutent. On peut définir g_+ et g_-, les composées des g_S de S respectivement positifs et négatifs. La bijection en question est $G = g_+ \circ g_-$. G étant la composée d'involutions, elle est bien bijective.

On note R l'application inversant l'orientation de toutes les arêtes. Elle commute avec g_S pour tout S, donc avec g_+ et g_-. Notant $h_\pm = g_\pm$, on a alors $G = h_+ \circ h_-$.

Cette bijection envoie chacune des arêtes extérieures servant d'extrémités aux chemins sur son homologue voisine dans le sens trigonométrique.

En composant h_+ avec la symétrie par rapport à la deuxième diagonale, on obtient encore une bijection, qui envoie chaque configuration d'arches sur sa symétrique par rapport à (x_1, x_{n+1}).

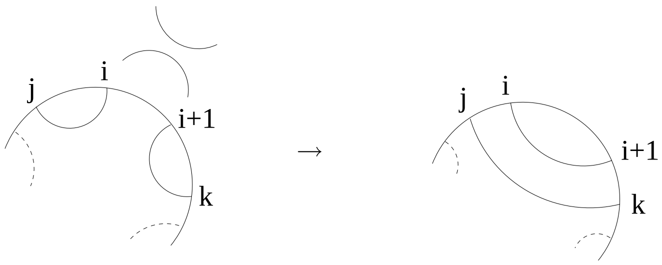
On a ainsi l'invariance désirée sous l'action deux éléments générateurs, donc sous le groupe dièdral tout entier.

3.2 Utilisation de Matlab

A.V. Razumov et Yu.G. Stroganov [4] ont conjecturé que les A_n étaient solution d'une équation linéaire que nous allons décrire.

D'abord, définissons h_i ($i \in \{1,\ldots,2n\}$): soit une configuration d'arches reliant x_i à x_j et x_{i+1} à x_k (les indices étant pris modulo $2n$). Si $j = i+1$ (et donc $k = i$), alors h_i laisse la configuration invariante. Sinon, h_i remplace les deux arches par une arche reliant x_i à x_{i+1} et une reliant x_j à x_k.

Exemple:



Soit n un entier naturel non-nul. On considère $H = \sum_{i=1}^{2n} h_i$, opérant sur les combinaisons linéaires de configurations de n arches. Razumov et Stroganov ont conjecturé que $\sum A_n(\pi)\pi$ est l'unique vecteur propre de H correspondant à la plus grande valeur propre $2n$, normalisé pour que la plus petite coordonnée soit 1.

Plus précisément, la matrice de H (dans la base triviale constituée par les configurations elles-mêmes) est non-nulle à coefficients positifs. Remarquons que quelles que soient les configurations d'arches π et π', il existe une suite $(i_k)_{k=1,\ldots,l}$ de longueur inférieure au nombre de configurations telle que $h_{i_l} \circ \ldots \circ h_{i_1}(\pi) = \pi'$, et que pour tout (i,j), $n \mapsto H^n_{i,j}$ est croissante, donc il existe m tel que tous les coefficients de H^m soient strictement positifs. Le théorème de Perron-Frobenius nous dit alors que la plus grande valeur propre de H est simple, positive, et que le vecteur propre correspondant à coefficients positifs. On sait que la somme des coefficients de chaque colonne est $2n$, c'est à dire que $(1,\ldots,1)$ est vecteur propre de la transposée de H, de valeur propre $2n$. Ce qui prouve que la valeur propre en question est bien $2n$.

J'ai utilisé le programme Matlab pour tester cette conjecture jusqu'à $n = 7$. Pour ce faire, chaque configuration d'arches est représentée par le vecteur ligne $[\sigma(1) \ \ldots \ \sigma(n)]$, où σ est la permutation de $\{1,\ldots,n\}$ telle que les arches relient x_{2k-1} à $x_{2\sigma(k)}$ pour tout k.

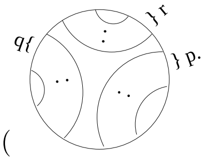
Il a d'abord fallu lister toutes les configurations, ce qui a été accompli par une démarche récursive:

1. d'abord, choisir l'arche partant de x_1 - disons qu'elle relie x_1 à x_{2k}
2. puis, utiliser les configurations préalablement calculées sur $\{x_2,\ldots,x_{2k-1}\}$ et sur $\{x_{2k+1},\ldots,x_{2n}\}$

Puis, on a déterminé la matrice de H, et calculé le vecteur propre en question.

Puis, par un algorithme naïf (dont le principe est de déterminer un par un le "type" de chaque sommet parmi les six différentes manières possibles d'orienter les arêtes incidentes, choisissant en fonction de (C) et des sommets adjacents déjà fixés), on a calculé toutes les configurations de glace carrée, et les configurations d'arches induites pour pouvoir compter A_n.

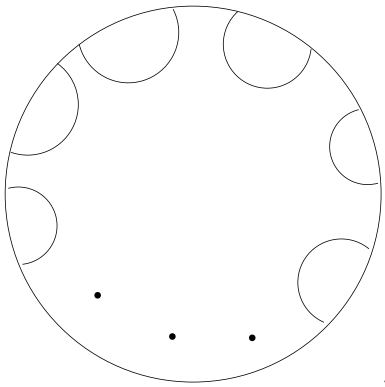
Je me suis également servi de Matlab pour tester d'autres conjectures (toujours jusqu'à $n = 7$), telles que

$A_n($ 

$) = \frac{(p+q+r-1)\overset{2}{!}(p-1)\overset{2}{!}(q-1)\overset{2}{!}(r-1)\overset{2}{!}}{(p+q-1)\overset{2}{!}(q+r-1)\overset{2}{!}(r+p-1)\overset{2}{!}},$

où $k\overset{2}{!} = \prod_{i=1}^{k} i!$,

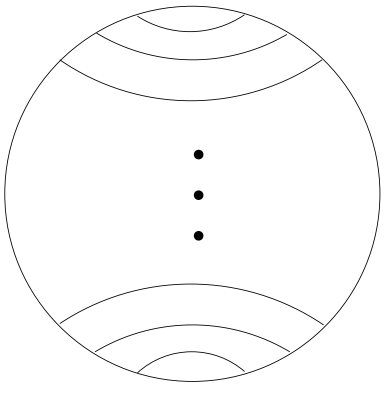
ou encore une conjecture émise par M.T. Batchelor, J. Gier et B. Nienhuis [5], portant sur la plus grande composante du vecteur propre: les données numériques indique qu'elle est la coordonnée associée à

$\Pi =$  ,

et que $A_n(\Pi) = A_{n-1}$

3.3 L' $A_n(\pi)$ minimal

La conjecture de Razunov et Stroganov dit, en particulier, que le plus petit $A_n(\pi)$, pour tout n, est égal à 1. En outre, cetter composante correspond à n arches "parallèles":



On peut le prouver:

Notations On utilise les coordonnées matricielles pour repérer des FPL "tronquées des arêtes et sommets extérieurs".

On numérote les extrémités des chemins composant une FPL:

– Si $n = 2.m + 1$:

$$x_k = \begin{cases} (1{,}2k+1) & \text{si} \quad k \in [1{,}m] \\ (2(k-m){,}n) & \quad k \in [m+1{,}2m] \\ (n{,}n) & \quad k = n \\ (1{,}1) & \quad k = -1 \\ (-2k-2{,}1) & \quad k \in [-m-1{,}-2] \\ (n{,}-2k-2m-3) & \quad k \in [-2m-1{,}-m-2] \end{cases}$$

– Si $n = 2.m$:

$$x_k = \begin{cases} (1{,}2k+1) & \text{si} \quad k \in [1{,}m-1] \\ (2(k-m)+1{,}n) & \quad k \in [m{,}2m-1] \\ (n{,}n) & \quad k = n \\ (1{,}1) & \quad k = -1 \\ (-2k-2{,}1) & \quad k \in [-m-1{,}-2] \\ (n{,}-2(k+m+1)) & \quad k \in [-2m{,}-m-2] \end{cases}$$

If faut maintenant prouver qu'il n'y a qu'une seule FPL composée de chemins c_k reliant x_k à x_{-k} ($k = 1 \ldots n$).

Comme chaque x_k est au dessus de la première diagonale Δ, alors que les x_{-k} sont en dessous, chaque c_k coupe Δ en au moins un point. Δ n'a que n points, donc chaque c_k coupe Δ en un unique point. On montre que la fonction qui à k associe l telle que $(l{,}l) \in c_k$ est croissante: c'est donc l'identité.

Étudier les FPL reliant x_k à x_{-k} est donc équivalent à étudier les ensembles de chemins de $\{(i{,}j)|1 \le j \le i \le n\}$ disjoints allant de $(k{,}k)$ à x_k et les ensembles de chemins de $\{(i{,}j)|1 \le i \le j \le n\}$ disjoints allant de $(k{,}k)$ à x_{-k}. Par symétrie, on peut se contenter de considérer les premiers. On montre par récurrence sur n qu'ils sont uniques pour tout n.

Par exemple, si $n = 2m + 1$, on montre que les extrémités x'_k des chemins de la restriction à $[1{,}n-1]^2$ sont:

– x_k si $1 \le k \le m-1$

– $x_m + (0{,}-1)$ si $k = m$

– $x_k + (1{,}-1)$ si $m+1 \le k \le 2m-1$

Cela implique que les x'_k sont en fait les extrémités des chemins correspondant aux FPL de rang $n-1$. On applique l'hypothèse de récurrence, qui prouve l'unicité des chemins allant des $(k{,}k)$ à x'_k. Puis on montre l'unicité des chemins reliant x'_k à x_k, et $(n-1{,}n-1)$ à x_{n-1}.

On a l'unicité cherchée.

Références

[1] G. Kuperberg, *Symetry classes of alternating-sign matrices under one roof*, *arXiv* : *math.CO*/00081884

[2] D. Bressoud, *Proofs and Confirmatins*, Cambridge University Press

[3] B. Wieland, *A Large Dihedral Symmetry of the Set of Alternating Sign Matrices*, $arXiv : math.CO/0006234$

[4] A.V. Razumov et Yu.G. Stroganov, *Combinatorial nature of ground state vector of* $O(1)$ *loop model*, $arXiv : math.CO/0104216$

[5] M.T. Batchelor, J. Gier et B. Nienhuis, *The quantum symmetric XXZ chain at* $\Delta = \frac{-1}{2}$, *alternating sign matrices and plane partition*, $arXiv : cond-math/0101385$