Benoît Kloeckner
Encadré par Jérôme Germoni, unité Desargues, UCB Lyon 1

Rapport de stage de première année
Juin-juillet 2001

# Représentations des carquois : le théorème de Gabriel

La théorie des représentations des carquois est un outil utile pour la théorie des représentations des algèbres. En effet, dans le cas d'un corps algébriquement clos, grâce à un théorème de Gabriel et à la théorie de Morita, on peut relier les représentations d'une algèbre de dimension finie à celles d'un quotient d'une algèbre de carquois.

Le stage a consisté en l'étude de la démonstration d'un autre théorème dû à Gabriel, qui caractérise les carquois admettant un nombre fini de représentations indécomposables (ce sont ceux dont la forme quadratique associée est définie positive) et donne une méthode pour les décrire toutes. La démonstration étudiée est celle de Bernstein, Gel'fand et Ponomarev dans [1].

On se place dans tout le rapport sur un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$, et on se limite à l'étude des carquois finis.

La partie 1 donne les définitions liées aux graphes (en dehors de toute orientation) et établit un résultat préliminaire sur les graphes de Dynkin et les graphes euclidiens. En particulier, on donne une description exhaustive des graphes dont la forme quadratique associée est définie positive.

Dans la partie 2 on donne les définitions liées à l'orientation des carquois et on démontre le théorème de Gabriel.

Certain schémas sont fournis en annexe.

## 1 Graphes, fonctions sous-additives et formes quadratiques

### 1.1 Définitions

**Définition 1.1 (graphe)**
*Les* graphes *considérés ici sont finis et peuvent comporter plusieurs arêtes entre deux sommets données et des* boucles *(arête dont les deux extrémités sont confondues).*
*Étant donné un graphe $\Gamma$, on note $\Gamma_0$ l'ensemble des sommets et $\Gamma_1$ l'ensemble des arêtes.*
*Étant donné un sommet $i$, on note $\Gamma^i$ l'ensemble des arêtes qui admettent $i$ comme extrémité.*
*Étant donnés deux sommets (éventuellement confondus) $i$ et $j$, on note $\Gamma^i_j$ l'ensemble des arêtes dont les extrémités sont exactement $i$ et $j$.*

On considère dans la suite de la section 1.1 un graphe sans boucle $\Gamma$.

**Définition 1.2 (fonction sous-additive)**
*On appelle* fonction sous-additive *sur le graphe* $\Gamma$ *toute fonction* $f : \Gamma_0 \longrightarrow \mathbb{N}$ *non nulle et vérifiant :*

$$\forall i \in \Gamma_0, \quad 2f(i) \geqslant \sum_{l \in \Gamma^i} f(\nu(l)).$$

*Où on a noté* $\nu(l)$ *l'extrémité de* $l$ *qui est différente de* $i$.
*On appelle* fonction additive *sur le graphe* $\Gamma$ *toute fonction* $f : \Gamma_0 \longrightarrow \mathbb{N}$ *non nulle et vérifiant :*

$$\forall i \in \Gamma_0, \quad 2f(i) = \sum_{l \in \Gamma^i} f(\nu(l)).$$

**Définition 1.3 (forme quadratique associée à un graphe)**
*On défini à partir du graphe* $\Gamma$ *une forme quadratique sur* $E_\Gamma = \mathbb{Q}^{\Gamma_0}$ *notée* $B_\Gamma$ *(ou simplement* $B$ *quand il n'y a pas ambigüité) par :* $B_\Gamma(\underline{x}) = \sum_{i \in \Gamma_0} x_i^2 - \sum_{l \in \Gamma_1} x_{\nu_1(l)} x_{\nu_2(l)}$, *où* $\underline{x} = (x_i)_{i \in \Gamma_0}$ *et* $\nu_1(l), \nu_2(l)$ *sont les extrémités de l'arête* $l$.
*On note* $\langle .,. \rangle_\Gamma$ *(ou simplement* $\langle .,. \rangle$*) la forme bilinéaire associée à* $B_\Gamma$.
*La forme* $2B_\Gamma$ *est associée (dans la base canonique) à la matrice* $(c_{ij})$ *où :* $c_{ii} = 2$ *et pour* $i \neq j$, $c_{ij}$ *est l'opposé du nombre d'arêtes entre les sommets* $i$ *et* $j$. *Cette matrice d'entiers est appelée* matrice de Cartan *du graphe* $\Gamma$.

*Remarque :* On n'a défini les fonctions sous-additives, la forme $B$ et la matrice de Cartan que pour les graphes sans boucle. Attention également à ne pas confondre les boucles (constituées d'une seule arête) avec les cycles, qui eux sont autorisés.

**Définition 1.4 (graphes de Dynkin et graphes euclidiens)**
*On appelle* graphe de Dynkin *tout graphe d'une des formes :* $A_n$, $D_n$, $E_6$, $E_7$, $E_8$. *On appelle* graphe euclidien *tout graphe d'une des formes :* $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$, $\widetilde{E}_8$ *(voir annexe).*

## 1.2 Caractérisation des graphes de Dynkin et des graphes euclidiens

Le but de cette section est d'établir un lien entre les trois aspects : graphe de Dynkin/graphe euclidien, existence d'une fonction sous-additive/d'une fonction additive, forme quadratique associée définie positive/positive pour les graphes connexes sans boucle. Les résultats exposés ici viennent des sections 4.5 et 4.6 du livre de Benson [3].

**Lemme 1.5**
*Un graphe connexe sans boucle soit est un graphe de Dynkin, soit admet un sous-graphe euclidien.*

**Lemme 1.6**

1. *Tout graphe euclidien admet une fonction sous additive ;*
2. *si un graphe sans boucle* $\Gamma$ *admet une fonction additive, alors toute fonction sous-additive sur* $\Gamma$ *est additive ;*
3. *toute fonction sous-additive sur un graphe euclidien est additive.*

**Lemme 1.7**
*Soit* $\Gamma$ *un graphe connexe sans boucle,* $\Gamma'$ *un sous-graphe strict de* $\Gamma$ *et* $f$ *une fonction sous additive sur* $\Gamma$. *Alors la restriction à* $\Gamma'_0$ *de* $f$ *est une fonction sous-additive non additive sur* $\Gamma'$.

**Lemme 1.8**
*Soit $\Gamma$ un graphe connexe sans boucle admettant une fonction sous-additive $f$.*

1. *Soit $\Gamma$ est un graphe de Dynkin, soit c'est un graphe euclidien ;*
2. *si $f$ n'est pas additive, $\Gamma$ est un graphe de Dynkin ;*
3. *si $f$ est additive, $\Gamma$ est un graphe euclidien.*

**Théorème 1.9 (caractérisation des graphes de Dynkin et des graphes euclidiens)**
*Soit $\Gamma$ un graphe connexe sans boucle. Alors il y a équivalence entre :*

1. *le graphe $\Gamma$ est de Dynkin ;*
2. *la forme quadratique $B_\Gamma$ est définie positive ;*
3. *il existe une fonction sous-additive non additive sur $\Gamma$.*

*Il y a également équivalence entre les assertions suivantes :*

1. *le graphe $\Gamma$ est euclidien ;*
2. *la forme quadratique $B_\Gamma$ est positive non définie ;*
3. *il existe une fonction additive sur $\Gamma$.*

*Dans ce dernier cas le noyau de $B_\Gamma$ est de dimension 1.*

*Remarque :* Il est possible de généraliser ces notions aux graphes valués et d'obtenir ainsi tous les graphes de Dynkin usuels.

## 1.3 Groupe de Weyl et transformations de Coxeter

On considère à nouveau dans cette section un graphe connexe sans boucle $\Gamma$.

**Définition 1.10**
*Pour $i \in \Gamma_0$, on définit $\bar{i} = (\delta_i^j)_{j\in\Gamma_0}$ où $\delta$ est le symbole de Kronecker.*
*On dit qu'un vecteur de $E_\Gamma$ est* intégral *s'il est à coefficients entiers dans la base canonique. On dit qu'un vecteur $\underline{x}$ de $E_\Gamma$ est* positif *et on note $\underline{x} > 0$ s'il est non nul et à coefficients positifs.*

**Définition 1.11**
*Pour tout $i \in \Gamma_0$, on définit une application linéaire involutive $\sigma_i$ sur $E_\Gamma$ par : $(\sigma_i\underline{x})_j = x_j$ si $i \neq j$ et $(\sigma_i\underline{x})_i = -x_i + \sum_{l\in\Gamma_i} x_{\nu(l)}$ où $\nu(l)$ est l'extrémité de $l$ distincte de $i$.*
*On note $W$ et on appelle* groupe de Weyl *le groupe d'applications linéaires de $E_\Gamma$ engendré par $(\sigma_i)_{i\in\Gamma_0}$.*

On vérifie facilement que $W$ préserve $\mathbb{Z}^{\Gamma_0}$ et la forme quadratique $B_\Gamma$, ce qui a une conséquence étonnante :

**Proposition 1.12**
*Si $B_\Gamma$ est définie positive, $W$ est fini.*

**Définition 1.13 (racines)**
*Les vecteurs $\bar{i}$ sont appelés* racines simples. *On appelle* racine *tout vecteur image d'une racine simple par un élément de $W$.*

*Remarque :* Cette définition doit être élargie si on s'intéresse aux carquois qui ne sont pas de type fini (voir plus bas). Ce n'est pas le cas ici.

**Lemme 1.14**
*Si $\underline{x}$ est une racine, alors $-\underline{x}$ est également une racine, $\underline{x}$ est un vecteur intégral, $B_\Gamma(\underline{x}) = 1$ et soit $\underline{x} > 0$, soit $-\underline{x} > 0$.*

**Définition 1.15 (transformation de Coxeter)**
*Si $i_1, i_2, \ldots, i_N$ est une numérotation de tous les sommets de $\Gamma$, on dit que $c = \sigma_{i_N} \ldots \sigma_{i_1}$ est une* transformation de Coxeter.

**Proposition 1.16 (propriétés des transformations de Coxeter)**
*Si $B_\Gamma$ est définie positive, alors :*

1. *les transformations de Coxeter n'ont pas de vecteur intégral invariant non nul ;*
2. *si $\underline{x} \in E_\Gamma$ est non nul et si $c$ est une transformation de Coxeter, il existe $n$ tel que $c^n(\underline{x})$ ne soit pas positif.*

Cette dernière proposition est essentielle : les applications $\sigma$ sont intimement liées aux foncteurs de réflexion que l'on va étudier dans la partie suivante, et qui sont l'outil développé par Bernstein, Gel'fand et Ponomarev pour leur démonstration du théorème de Gabriel dans [1].

# 2 Carquois, théorème de Gabriel

## 2.1 Carquois et algèbres de carquois

**Définition 2.1 (carquois)**
*On appelle* carquois *un couple $(\Gamma, \Lambda)$ où $\Gamma$ est un graphe (fini, avec éventuellement des boucles) et $\Lambda$ est une* orientation *de $\Gamma$, c'est-à-dire un couple $(s, b)$ de fonctions de $\Gamma_1$ dans $\Gamma_0$ tel que pour toute arête $l$, les extrémités de $l$ soient exactement $s(l)$ et $b(l)$.*
*Étant donnée une arête $l$, on appelle* source *de $l$ le sommet $s(l)$ et* but *le sommet $b(l)$. On appelle souvent $\Gamma$ le* graphe sous-jacent *de $(\Gamma, \Lambda)$.*

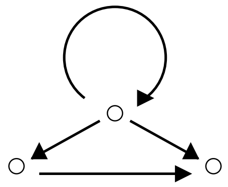

FIG. 1: Un exemple de carquois.

**Définition 2.2 (représentations d'un carquois)**
*Soit $(\Gamma, \Lambda)$ un carquois. On appelle* représentation *(sur $\mathbb{K}$, de dimension finie) de $(\Gamma, \Lambda)$ la donnée de deux familles $(V_i)_{i\in\Gamma_0}, (f_l)_{l\in\Gamma_1}$ où les $V_i$ sont des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et les $f_l$ des applications linéaires de $V_{s(l)}$ dans $V_{b(l)}$.*
*On note $\mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ la catégorie dont les objets sont les représentations du carquois $(\Gamma, \Lambda)$ et les flèches $((V_i), (f_l)) \longrightarrow ((W_i), (g_l))$ sont les familles d'applications linéaire $(\varphi_i : V_i \longrightarrow W_i)_{i\in\Gamma_0}$ telles que $\forall l \in \Gamma_1, \quad g_l \circ \varphi_{s(l)} = \varphi_{b(l)} \circ f_l$.*
*On dit de deux représentations isomorphes qu'elles sont* équivalentes, *on utilise le symbole $\simeq$.*

On peut écrire de façon naturelle la somme directe de deux représentations : $((V_i), (f_l)) \oplus ((W_i), (g_l)) = ((V_i \oplus W_i), (f_l \oplus g_l))$. On peut décrire une représentation à équivalence près en associant une matrice à chaque flèche ; dans cette description matricielle, la somme directe de deux représentations est obtenue en associant à chaque flèche la matrice diagonale par blocs dont le premier bloc est la matrice de la première représentation, et le second bloc la matrice de la seconde représentation.

**Définition 2.3 (indécomposabilité)**
*On dit d'une représentation non nulle qu'elle est* indécomposable *si elle ne peut pas s'écrire comme la somme directe de deux représentations non triviales.*

*Remarque :* Il faut éviter d'utiliser le terme « irréductible » à la place d' « indécomposable ». En effet les représentations des carquois correspondent en fait aux modules sur l'algèbre du carquois (définie plus loin), et en terme de module « irréductible » est un synonyme de « simple », propriété en général strictement plus forte qu' « indécomposable ».

*Exemple :* Les représentations $(L_i)_{i\in\Gamma_0}$ sont définies par $(L_i)_j = 0$ si $i \neq j$, $(L_i)_i = \mathbb{K}$ et pour tout $l$, $f_l = 0$. Ces sont des représentations irréductibles donc indécomposables. On notera par la suite $L_i$ pour désigner une telle représentation sans préciser pour quelle orientation quand le contexte ne laisse pas d'ambiguité.

**Définition 2.4 (chemins d'un carquois)**
*Soit $(\Gamma, \Lambda)$ un carquois. On appelle chemin de longueur 0 associé au sommet $i$ le symbole $e_i$ et pour tout entier strictement positif $n$ on appelle chemin de longueur $n$ toute suite $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ d'arêtes telles que pour tout $k \in \{1 \dots n-1\}$, $\quad s(l_k) = b(l_{k+1})$ (voir la figure 2). On appelle* chemin de $(\Gamma, \Lambda)$ *tous les chemins de longueur : 0 ou un entier strictement positif. On note $\mathcal{C}(\Gamma, \Lambda)$ l'ensemble des chemins de $(\Gamma, \Lambda)$.*

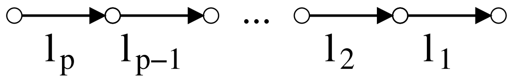


FIG. 2: Le chemin $(l_1, l_2, \dots, l_p)$.

**Définition 2.5 (algèbre d'un carquois)**
*Soit $(\Gamma, \Lambda)$ un carquois. On appelle* algèbre des chemins du carquois *ou plus simplement* algèbre du carquois *$(\Gamma, \Lambda)$ sur le corps $\mathbb{K}$ l'espace vectoriel de base $\mathcal{C}(\Gamma, \Lambda)$ muni de la loi de concaténation des chemins (notée par un point). Si $i \in \Gamma_0$, $\gamma = (l_1, \dots, l_p)$ et $\gamma' = (l'_1, \dots, l'_q)$ sont des chemins :*

$$\gamma'.\gamma = \begin{cases} (l'_1, \dots, l'_q, l_1, \dots, l_p) & \text{si } s(l'_q) = b(l_1)\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$e_i.\gamma = \begin{cases} \gamma & \text{si } b(l_1) = i\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\gamma.e_i = \begin{cases} \gamma & \text{si } s(l_p) = i\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Remarque :* l'algèbre d'un carquois est bien une algèbre, et les représentations du carquois correspondent exactement aux modules de son algèbre (l'espace vectoriel sous-jacent est la somme directe extérieure des $V_i, i \in \Gamma_0$ et une flèche $l$ agit comme $f_l$ sur $V_{s(l)}$ et comme 0 sur $V_i, i \neq S(l)$).

## 2.2 Exemples

### 2.2.1 Le carquois de l'équivalence matricielle

Considérons le carquois de la figure 3. Une représentation est la donnée de deux espaces vectoriels $V_0$, $V_1$ et d'une application linéaire $f : V_0 \longrightarrow V_1$. L'équivalence de représentation correspond à des changements de bases sur chacun des espaces vectoriels. Ce carquois correspond donc au problème matriciel de l'équivalence.

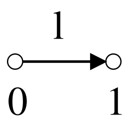


FIG. 3: Le carquois $A_2$.

Soit $V_0'$ un supplémentaire dans $V_0$ de $\operatorname{Ker} f$ et $V_1'$ un supplémentaire dans $V_1$ de $\operatorname{Im} f$. Alors $f$ réalise une bijection entre $V_0'$ et $\operatorname{Im} f$. On peut donc écrire, la représentation comme la somme directe :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0} & V_1' \\ & \oplus & \\ V_0' & \xrightarrow{\simeq} & \operatorname{Im} f \\ & \oplus & \\ \operatorname{Ker} f & \xrightarrow{0} & 0 \end{array}$$

Or $0 \xrightarrow{0} V_1'$ est la somme directe de $\dim V_1'$ termes de la forme $0 \xrightarrow{0} \mathbb{K}$. De même $V_0' \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Im} f$ est la somme directe (à équivalence près) de $\operatorname{Rg} f$ termes de la forme $\mathbb{K} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathbb{K}$ et $\operatorname{Ker} f \xrightarrow{0} 0$ la somme directe de $\dim \operatorname{Ker} f$ termes de la forme $\mathbb{K} \xrightarrow{0} 0$. Les seules représentations indécomposables possibles pour le carquois $A_2$ sont donc :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{K}\,; \\ \mathbb{K} & \xrightarrow{0} & 0\,; \\ \mathbb{K} & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \mathbb{K}. \end{array}$$

Comme ces trois représentations sont indécomposables (on peut remarquer que seules les deux premières sont irréductibles, puisque la troisième contient la première), on a décrit exactement les représentations indécomposables de $A_2$. Comme elles sont en nombre fini, on dit de $A_2$ qu'il est de type *fini*.

On remarque que $B_{A_2}(x_0, x_1) = x_0^2 + x_1^2 - x_0 x_1 = \left(x_0 - \frac{x_1}{2}\right) + \frac{3}{4}x_1^2$ donc $B_{A_2}$ est bien définie positive. Les racines simples sont $(1,0)$ et $(0,1)$. On a $\sigma_0(0,1) = (1,1)$, puis $\sigma_0(1,0) = (-1,0)$. De plus $\sigma_1(0,1) = (0,-1)$ et $\sigma_1(1,0) = (1,1)$ (voir figure 4), on voit que les racines positives sont les deux racines simples et $(1,1)$ : les racines positives sont exactement les vecteurs des dimensions des représentations indécomposables. Ce fait est général, c'est l'objet du théorème de Gabriel.

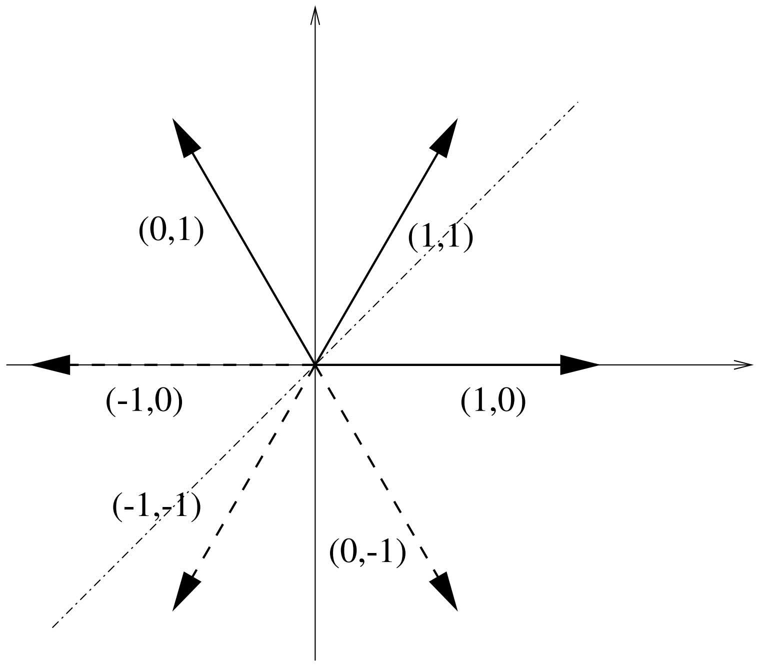


FIG. 4: L'orthogonalité géométrique correspond à l'orthogonalité pour $B_{A_2}$. $\sigma_0$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe vertical, $\sigma_1$ est la symétrie orthogonale par rapport à la ligne mixte. Les racines sont les vecteurs en gras, les racines positives sont représentées en trait plein.

### 2.2.2 Le carquois de la réduction des endomorphismes

Un autre exemple simple est celui du carquois de la figure 5. Cette fois, le problème correspondant est celui de la réduction des endomorphismes, et c'est le théorème de Jordan qui donne le résultat : les représentations indécomposables sont données par les matrices ne comportant qu'un seul bloc de Jordan. Il y en a donc une infinité. Toutefois, pour chaque dimension il n'y a qu'un nombre fini (ici, une seule) de familles à un paramètre de représentations : on dit que le carquois est de type *docile* (pour des détails, on peut consulter la section 4.4 de [3]).

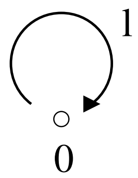


FIG. 5: Le carquois à une boucle

## 2.3 Foncteurs de Coxeter

**Définition 2.6**
*Soit* $(\Gamma, \Lambda)$ *un carquois.*
*Étant donné un sommet* $x$*, on note* $\sigma_x \Lambda$ *l'orientation de* $\Gamma$ *obtenue en changeant le sens de chaque arête de* $\Gamma^x$*.*
*On dit d'un sommet* $x$ *qu'il est une* source *(ou encore qu'il est* $(-)$-accessible*) si aucune arête n'arrive en* $x$ *:* $\forall l \in \Gamma^x, \quad b(l) \neq x$*. De même on dit de* $x$ *que c'est un* puits *(ou qu'il est* $(+)$-accessible*) si aucune arête ne part de* $x$ *:* $\forall l \in \Gamma^x, \quad s(l) \neq x$*.*

**Définition 2.7 (foncteurs de réflexion)**
*Soit* $(\Gamma, \Lambda)$ *un carquois et* $x$ *un sommet.*

1. *Si* $x$ *est un puits, on définit un foncteur* $F_x^+$ *de* $\mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ *vers* $\mathcal{L}(\Gamma, \sigma_x \Lambda)$ *de la façon suivante (on désigne par* $((W_i), (g_l))$ *l'image de* $((V_i), (f_l))$ *par* $F_i^+$*).*
   *On pose tout d'abord* $W_i = V_i$ *si* $i \neq x$*. On considère ensuite les arêtes* $l_1, l_2, \dots, l_K$ *de* $\Gamma^x$*. On note* $h$ *l'application de la somme directe extérieure* $\bigoplus_{k=1}^{K} V_{s(l_k)}$ *vers* $V_x$ *définie par* $h(v_1, v_2, \dots, v_K) = f_{l_1}(v_1) + f_{l_2}(v_2) + \cdots + f_{l_K}(v_K)$*. On définit* $W_x = \operatorname{Ker} h$*. On pose* $g_l = f_l$ *si* $l \notin \Gamma^x$*. Pour* $l \in \Gamma^x$*,* $g_l$ *est la composition de l'inclusion* $W_x$ *dans* $\bigoplus V_{s(l_k)}$ *et de la projection canonique de* $\bigoplus V_{s(l_k)}$ *dans* $V_{s(l)} = W_{s(l)}$*.*
2. *Si* $x$ *est une source, on définit un foncteur* $F_x^-$ *de* $\mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ *vers* $\mathcal{L}(\Gamma, \sigma_x \Lambda)$ *de la façon suivante (on désigne par* $((W_i), (g_l))$ *l'image de* $((V_i), (f_l))$ *par* $F_i^-$*).*
   *On pose comme précédemment* $W_i = V_i$ *si* $i \neq x$ *et* $g_l = f_l$ *si* $l \notin \Gamma^x$*. On considère* $\{l_1, l_2, \dots, l_K\} = \Gamma^x$ *et*
   $$\begin{array}{rccc} \widetilde{h}: & V_x & \longrightarrow & \bigoplus_{k=1}^{K} V_{b(l_k)} \\ & v & \longmapsto & (f_{l_1}(v), \dots, f_{l_K}(v)) \end{array}$$
   *On pose* $W_x = \bigoplus V_{b(l_k)} / \operatorname{Im} \widetilde{h}$ *et, pour* $l \in \Gamma^x$*,* $g_l : W_{b(l)} \longrightarrow W_x$ *est défini comme la composition de l'inclusion* $W_{b(l)} = V_{b(l)} \hookrightarrow \bigoplus V_{b(l_k)}$ *et de la projection de cette somme directe dans* $W_x$*.*

*Remarque :* Ces définitions données pour les objets déterminent l'action des foncteurs de réflexion sur les flèches.

**Théorème 2.8 (propriétés des foncteurs de réflexion)**
*Soit $(\Gamma, \Lambda)$ un carquois, $V$ une représentation irréductible et $x$ un sommet.*

1. *Si $x$ est un puits, il y a deux possibilités :*
   (a) *Si $V \simeq L_x$, $F_x^+(V) = 0$ ;*
   (b) *sinon $F_x^+(V)$ est une représentation indécomposable, $F_x^- F_x^+(V) = V$ et les dimensions des espaces de $F_x^+(V)$ vérifient :*

$$\begin{cases} \dim F_x^+(V)_i = \dim V_i & \text{si } i \neq x \\ \dim F_x^+(V)_x = -\dim V_x + \sum_{l \in \Gamma^x} \dim V_{s(l)}. \end{cases} \tag{1}$$

2. *Si $x$ est une source, il y a deux possibilités :*
   (a) *Si $V \simeq L_x$, $F_x^-(V) = 0$ ;*
   (b) *sinon $F_x^-(V)$ est indécomposable, $F_x^+ F_x^-(V) = V$ et*

$$\begin{cases} \dim F_x^-(V)_i = \dim V_i & \text{si } i \neq x \\ \dim F_x^-(V)_x = -\dim V_x + \sum_{l \in \Gamma^x} \dim V_{b(l)}. \end{cases} \tag{2}$$

*Remarque :* Il est important de faire le rapprochement entre les formules 1 et 2 et les éléments du groupe $W$ de la section 1.3 : le vecteur $\underline{\dim} V$, formé des dimensions des $V_i$, subit la transformation $\sigma_x$ quand $V$ subit $F_x^+$ ou $F_x^-$ (sauf si $V \simeq L_x$).

**Définition 2.9**
*On dit qu'une suite de sommet $i_1, i_2, \ldots, i_K$ d'un carquois est* $(+)$-accessible *pour l'orientation $\Lambda$ si $i_1$ est $(+)$-accessible pour $\Lambda$, $i_2$ est $(+)$-accessible pour $\sigma_{i_1}\Lambda$, $i_3$ est $(+)$-accessible pour $\sigma_{i_2}\sigma_{i_1}\Lambda$ et ainsi de suite. On peut définir de la même façon une suite* $(-)$-accessible.

**Corollaire 2.10**
*Soit $(\Gamma, \Lambda)$ un carquois et $i_1, i_2, \ldots, i_K$ une suite $(+)$-accessible.*

1. *Pour tout $k$ $(1 \leqslant k \leqslant K)$, la représentation $F_{i_1}^- F_{i_2}^- \ldots F_{i_{k-1}}^-(L_{i_k})$ (où $L_{i_k}$ est pris dans $\mathcal{L}(\Gamma, \sigma_{i_{k-1}}\sigma_{i_{k-2}} \ldots \sigma_{i_1}\Lambda)$) est indécomposable dans $\mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ si $\sigma_{i_1}\sigma_{i_2} \ldots \sigma_{i_{k-1}}(\overline{i_k}) > 0$ et nulle sinon.*
2. *Soit $V \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ une représentation indécomposable telle que*
$$\sigma_{i_K} \ldots \sigma_{i_1}(\underline{\dim}(V)) \not> 0.$$
   *Alors il existe $k \in \{1, \ldots, K\}$ tel que*
$$V \simeq F_{i_1}^- F_{i_2}^- \ldots F_{i_{k-1}}^-(L_{i_k}).$$

**Théorème 2.11**
*Soit $\Gamma$ un graphe sans cycle (en particulier, sans boucle) et $\Lambda$, $\Lambda'$ deux orientations de $\Gamma$.*

1. *Il existe une suite de sommets $i_1, i_2, \ldots, i_K$ $(+)$-accessible pour $\Lambda$ telle que $\sigma_{i_K}\sigma_{i_{K-1}} \ldots \sigma_{i_1}\Lambda = \Lambda'$.*
2. *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ les ensembles des classes d'isomorphisme de représentations indécomposables de respectivement $\mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ et $\mathcal{L}(\Gamma, \Lambda')$, $\widetilde{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}$ l'ensemble des représentations de la forme $F_{i_1}^- F_{i_2}^- \ldots F_{i_{k-1}}^-(L_{i_k})(1 \leqslant k \leqslant K)$ et $\widetilde{\mathcal{M}'} \subseteq \mathcal{M}'$ l'ensemble des représentations de la forme $F_{i_K}^+ F_{i_{K-1}}^+ \ldots F_{i_{k+1}}^+(L_{i_k})(1 \leqslant k \leqslant K)$. Alors le foncteur $F_{i_K}^+ F_{i_{K-1}}^+ \ldots F_{i_1}^+$ réalise une bijection entre $\mathcal{M} \setminus \widetilde{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{M}' \setminus \widetilde{\mathcal{M}'}$.*

Les foncteurs de réflexion permettent de construire des foncteurs de $\mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ dans lui même.

**Définition 2.12 (foncteurs de Coxeter)**
*Soit $(\Gamma, \Lambda)$ un carquois sans cycle orienté. On peut alors choisir une numérotation $i_1, i_2, \dots, i_N$ des sommets de $\Gamma$ telle que pour toute arête, l'indice de la source est plus grand que l'indice du but. On pose $\phi^+ = F^+_{i_N} F^+_{i_{N-1}} \dots F^+_{i_1}$ et $\phi^- = F^-_{i_1} F^-_{i_2} \dots F^-_{i_N}$. On les appelle* foncteurs de Coxeter.

**Lemme 2.13 (propriétés basiques des foncteurs de Coxeter)**

1. *La suite $i_1, i_2, \dots, i_N$ est $(+)$-accessible et $i_N, i_{N-1}, \dots, i_1$ est $(-)$-accessible ;*
2. *Les foncteurs de Coxeter vont de $\mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ dans lui-même.*
3. *Les foncteurs de Coxeter ne dépendent pas du choix de $i_1, i_2, \dots, i_N$.*

## 2.4 Le théorème de Gabriel

On considère un carquois $(\Gamma, \Lambda)$ connexe.

**Théorème 2.14 (Gabriel)**
*S'il y a un nombre fini de classes de représentations indécomposables dans $\mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$, alors $\Gamma$ est un graphe de Dynkin.*
*Réciproquement, si $\Gamma$ est un graphe de Dynkin, il y a un nombre fini de classes de représentation indécomposables. De plus la fonction $V \longmapsto \underline{\dim} V$ réalise une bijection entre les classes de représentations indécomposables et les racines positives dans $E_\Gamma$.*

PREUVE :
La démonstration est issue de [1]. Les résultats concernant les variétés ont été admis. Il est facile d'écarter le cas où $\Gamma$ comporte une boucle, puisqu'alors on a un sous-carquois de la forme de la figure 5.
L'argument de ce paragraphe est dû à Tits. On suppose qu'il existe un nombre fini de représentations indécomposables. Si on fixe un vecteur dimension $\underline{m}$, il y a alors un nombre fini de classes de représentations de dimension $\underline{m}$. Si on fixe des bases, une représentation de dimension $\underline{m}$ est un élément de $\prod_{l \in \Gamma_1} M_{m_{b(l)}, m_{s(l)}}(\mathbb{K})$ et deux représentations sont équivalentes si et seulement si elle sont dans la même orbite sous le groupe $\prod_{i \in \Gamma_0} GL(\mathbb{K}^{m_i})/\mathbb{K}^\star$. Pour qu'il y ait un nombre fini d'orbites, il est nécessaire que la dimension du groupe qui agit soit au moins aussi grande que la dimension de l'espace sur lequel il agit. Ceci impose $B_\Gamma(\underline{m}) > 0$ pour tout $\underline{m}$. Vu que les coefficients extradiagonaux de la matrice de Cartan sont négatifs ou nuls, on en déduit que $B_\Gamma$ est définie positive. Le théorème 1.9 permet de conclure pour la première partie de l'énoncé.
Pour la deuxième partie, commençons par considérer une représentation indécomposable $V$. On choisit une numérotation des sommets comme en 2.12. Alors la suite $(j_1, j_2, \dots) = (i_1, \dots, i_N, i_1, \dots, i_N, \dots)$ est $(+)$-accessible. La prop. 1.16(2.) garantit l'existence de $K$ tel que $\sigma_{j_K} \dots \sigma_{j_1}(\underline{\dim} V)$ ne soit pas positif. Alors, par le corollaire 2.10, on sait qu'il existe $k$ tel que $V \simeq F^-_{j_1} F^-_{j_2} \dots F^-_{j_{k-1}}(L_{j_k})$.
On en déduit que $\underline{\dim} V$ est une racine positive et que $V$ est entièrement déterminée (à isomorphisme près) par $\underline{\dim} V$.
Considérons ensuite une racine positive $\underline{x}$. Les résultats 1.16 et 2.10 permettent d'exhiber une suite $(+)$-accessible $i_1, \dots, i_K$ telle que $F^-_{i_1} F^-_{i_2} \dots F^-_{i_{K-1}}(L_{i_K}) \in \mathcal{L}(\Gamma, \Lambda)$ soit une représentation irréductible de dimension $\underline{x}$.

■

# Références


[1] I.N. Bernstein, I.M. Gel'fand et V.A. Ponomarev, Coxeter functors and Gabriel's theorem, Russian Mathematical Surveys 1973, XXVIII.2 17-32.

[2] I. Reiten, Dynkin diagrams and the representation theory of algebras, Notices of the AMS 1997, 44.5 546-556.

[3] D.J. Benson, representations and cohomology I : basic representation theory of finite groups and associative algebras, Cambridge studies in advanced mathematics 1991.

## Annexes : graphes de dynkin et graphes euclidiens

Les numérotations des sommets des graphes de Dynkin ($A_n$, $D_n$, $E_6$, $E_7$, $E_8$) définissent une fonction sous additive non additive, tandis que les fonctions données pour les graphes euclidiens ($\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$, $\widetilde{E}_8$) sont additives.

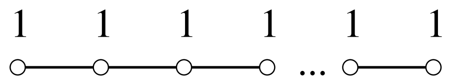


Fig. 6: $A_n$ comporte $n$ sommets

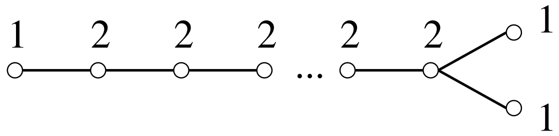


Fig. 7: $D_n$ comporte $n$ sommets

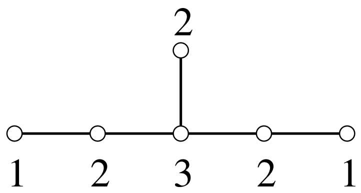


Fig. 8: $E_6$

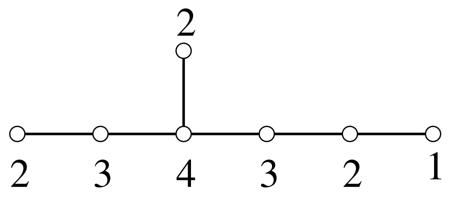


Fig. 9: $E_7$

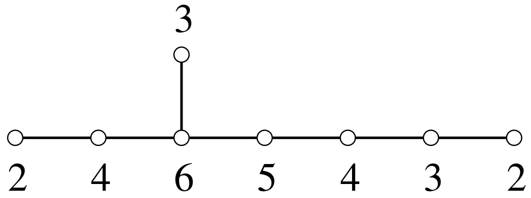


Fig. 10: $E_8$

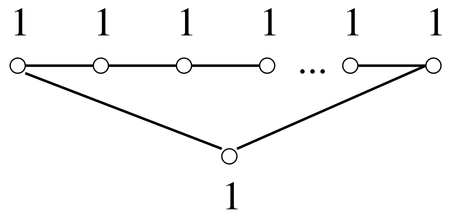


Fig. 11: $\widetilde{A}_n$ comporte $n+1$ sommets

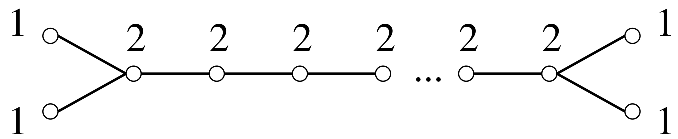


Fig. 12: $\widetilde{D}_n$ comporte $n+1$ sommets

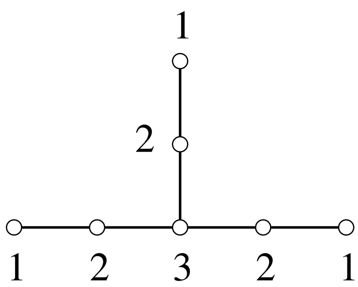


Fig. 13: $\widetilde{E}_6$

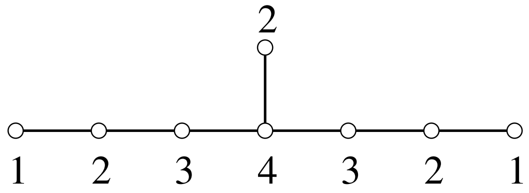


Fig. 14: $\widetilde{E}_7$

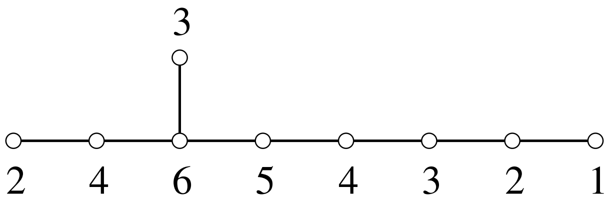


Fig. 15: $\widetilde{E}_8$