# LE THÉORÈME DE STALLINGS SUR LES GROUPES AYANT AU MOINS DEUX BOUTS

## Introduction

Un espace topologique $E$ est dit *connexe à l'infini* si pour tout compact $C \subset E$ il existe un compact $C'$ le contenant de complémentaire connexe.

On dit - cette définition remonte à Freudenthal ([3]) - qu'un groupe $G$ de type fini a *au moins deux bouts* si son graphe de Cayley relativement à un système de générateurs n'est pas connexe à l'infini. Si $G$ est de plus de présentation finie, cela équivaut à dire qu'il existe un complexe simplicial fini $P$ tel que $G = \pi_1(P)$ et tel que le revêtement universel de $P$ ne soit pas connexe à l'infini.

Le théorème de Stallings auquel nous nous intéressons ([4]) est le suivant:

**Théorème** (Stallings). *Si un groupe $G$ a au moins deux bouts, alors il peut s'écrire comme produit amalgamé non trivial ou comme extension HNN au-dessus d'un groupe fini.*

L'intérêt de ce résultat, dans le cas où $G$ est de présentation finie, réside en ce que d'une hypothèse de nature géométrique sur un polyèdre $P$ on obtient une propriété algébrique de son groupe fondamental. La réciproque, beaucoup plus facile, remonte à Freudenthal ([3],[5]).

Dans un exposé à Lyon en décembre 95, M. Gromov a proposé une démonstration très conceptuelle de ce théorème basée sur les propriétés d'existence et d'unicité des hypersurfaces minimales. Le but de ce mémoire est d'adapter cette idée, dans le cas d'un groupe de présentation finie, en proposant une démonstration légèrement différente basée sur la notion de "track" définie par Dunwoody dans sa démonstration de l'accessibilité des groupes de présentation finie ([2]): cette approche permet d'éviter d'appliquer des résultats fins sur l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Plateau.

L'idée de la preuve est simple: nous allons construire un graphe $\Lambda$ localement séparant dans $P$ tel que l'image de $\pi_1(\Lambda)$ dans $\pi_1(P)$ soit finie. On en déduira le théorème en appliquant le théorème de Van Kampen à $P$.

Ce graphe $\Lambda$ est obtenu en deux étapes:

1) on construit (cf partie 2) un graphe $\tilde{\Lambda}$ séparant à l'infini dans le revêtement universel $\tilde{P}$ de $P$.

2) parmi tous les graphes ainsi obtenus, on montre l'existence d'un graphe minimal (dans un sens que nous définirons plus loin) tel que pour tout $g \in G$ on a $g\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}$ ou $g\tilde{\Lambda} \cap \tilde{\Lambda} = \emptyset$ (cf partie 3).

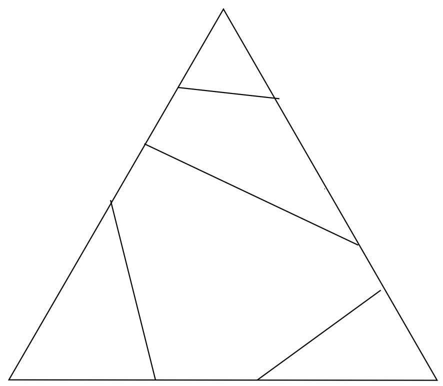

FIGURE 1.

Ainsi, $\tilde{\Lambda}$ se projette bien dans $P$ en un graphe vérifiant les propriétés voulues.

## 1. Définitions et généralités

On se place dans un 2-complexe simplicial $K$ tel que $H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$.

**Définition 1.** *Un compact $C$ de $K$ est dit séparant à l'infini si $K - C$ admet au moins deux composantes connexes d'adhérence non compacte.*

On voit donc que $K$ a au moins deux bouts si et seulement s'il admet un compact séparant à l'infini.

**Définition 2.** *Une* lamination (pattern) *$L$ est un sous-ensemble de $K$ qui vérifie les propriétés suivantes:*
*(i)Pour tout 1-simplexe $\gamma$ de $K$, $L \cap \gamma$ est la réunion d'un nombre fini de points à l'intérieur de $\gamma$.*
*(ii)Pour tout 2-simplexe $\sigma$ de $K$, $L \cap \sigma$ est la réunion d'un nombre fini de segments disjoints joignant des arêtes distinctes de $\sigma$.*
*Une composante connexe d'une lamination est appelée* feuille (track).

Si une feuille $t$ sépare $K$ en deux composantes connexes $C_+$ et $C_-$ (ce qui est toujours le cas lorsque $H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, cf [1], p. 226), on définit l'application $b_t : K^0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par: $b_t(v) = 1$ si $v \in C_+$, $b_t(v) = 0$ si $v \in C_-$ . L'application $b_t^* = 1 - b_t$ vérifie dans tout ce qui suit les mêmes propriétes que $b_t$, donc le choix de la numérotation des $C_i$ est sans importance. Par ailleurs, on identifiera souvent par la suite $b_t$ et l'ensemble $b_t^{-1}(1) \subset K^0$.

Etant donné une lamination $L$, on lui associe l'application $j_L : K^1 \to \mathbb{Z}^+$ définie par: $j_L(\gamma) = card(\mathrm{L} \cap \gamma)$ (on remarque que $L$ est entièrement caractérisée par $L \cap K^1$.)

**Lemme 1.1.** *Soit $f : K^1 \to \mathbb{Z}^+$ telle que pour tout 2-simplexe $\sigma = \{e_1, e_2, e_3\} \in K^2$, on ait: $f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = 2m_\sigma$ où $m_\sigma \in \mathbb{Z}^+$ et $f(e_i) \leq m_\sigma$ pour $1 \leq i \leq 3$. Alors il existe une lamination $L$ telle que $j_L = f$.*
*Par ailleurs, si $L$ et $M$ sont deux laminations telles que $j_L = j_M$, alors il existe un homéomorphisme $h : K \to K$ tel que $h(L) = M$ et $h(\sigma) = \sigma$ pour tout 2-simplexe $\sigma$.*

**Définition 3.** *Deux laminations $L$ et $M$ sont dites* équivalentes *si $j_L = j_N$. On note $L \equiv M$.*

Si $t$ est une feuille de $K$, on note $\|t\| = card(t \cap K^1)$.

## 2. Existence d'une feuille séparante à l'infini

Nous voulons montrer que si $\tilde{P}$ est non connexe à l'infini, alors il admet une feuille séparante à l'infini.

**Lemme 2.1.** *Si $K$ admet une lamination séparante à l'infini, alors il admet une feuille séparante à l'infini.*

*Preuve.* Soit $L$ une lamination séparante à l'infini. Alors, par compacité, $L$ admet un nombre fini de feuilles, par suite $K - L$ est la réunion d'un nombre fini de composantes connexes $D_i$ $(1 \leq i \leq k)$. Comme $L$ est séparante à l'infini, au moins deux de ces composantes sont d'adhérence non compacte. Alors il existe une feuille de $L$ qui sépare ces deux composantes, par suite cette feuille est séparante à l'infini. □

**Définition 4.** *Une feuille $t$ est dite* minimale *si:*
*(i) $t$ est séparante à l'infini.*
*(ii) $\|t\|$ est minimal pour la condition (i).*
*Si $K$ admet une feuille minimale $t$, on notera $m(K) = \|t\|$.*

On remarque que la condition (i) équivaut au fait que $t$ est compacte et sépare $K$ en deux composantes qui ont chacune une infinité de sommets.

Par ailleurs, si $U \subset K^0$, on notera $U^* = K^0 - U$ et $\partial U$ (appelé *bord de $U$*) l'ensemble des arêtes qui ont une extrémité dans $U$ et l'autre dans $U^*$.

**Proposition 2.2.** *(i) $K$ admet une feuille minimale si et seulement si il existe $U \subset K^0$ tel que $U$ et $U^*$ soient infinis et $\partial U$ soit fini.*

*(ii) Si un tel $U$ existe, alors $m(K) \leq |\partial U|$ et il y a égalité si et seulement si $U = b_t$ où $t$ est une feuille minimale.*

*(iii) Toute feuille minimale intersecte chaque arête en au plus un point.*

*Preuve.* Si $K$ admet une feuille minimale $t$, alors l'ensemble $b_t$ vérifie les propriétés voulues.

Réciproquement, soit $U$ de bord fini tel que $U$ et $U^*$ soient infinis. Définissons $f : |K^1| \to \mathbb{Z}^+$ par: si $\gamma \in \partial U$ alors $f(\gamma) = 1$, sinon $f(\gamma) = 0$. Alors on voit facilement que $f$ vérifie les hypothèses du lemme 1.1; par suite, il existe une lamination $L$ telle que $f = j_L$. Or cette lamination $L$ sépare $U$ et $U^*$, et elle est finie (car $\partial U$ est fini) donc elle est séparante à l'infini. Donc par le lemme 2.1, elle contient une feuille $s$ séparante à l'infini. Alors $s$ vérifie (i), et on a $\|s\| \leq |L \cap K^1| = |\partial U|$. Par suite, $K$ admet une feuille minimale $t$, et $m(K) = \|t\| \leq \|s\| \leq |\partial U|$.

De plus, si $m(K) = |\partial U|$, alors on a $m(K) = \|s\| = |L \cap K^1|$, et donc $L$ ne contient qu'une seule feuille $s$, qui est minimale. On a alors $U = b_t$.

Si $t$ est minimale, en appliquant ce qui précède à $b_t$, on construit une lamination $L$ séparante à l'infini telle que $j_L \leq j_t$ et $j_L \leq 1$. Alors par minimalité de $t$, on a $t = L$ et donc $j_t \leq 1$. □

**Corollaire 2.3.** *Si $\tilde{P}$ est non connexe à l'infini, alors il admet une feuille minimale.*

*Preuve.* Soit $C$ un compact séparant à l'infini. Il suffit d'appliquer la proposition 2.2 à l'une des composantes connexes de $\tilde{P} - C$ d'adhérence non compacte. □

## 3. Existence d'une lamination séparante adaptée à l'action de $G$

Nous reprenons les notations de l'introduction.

Le groupe $G$ agit simplicialement sur $\tilde{P}$. On met sur chaque 2-simplexe de $\tilde{P}$ la métrique euclidienne standard. $G$ agit isométriquement sur $\tilde{P}$.

Nous voulons montrer que si $\tilde{P}$ a au moins deux bouts, alors il existe une feuille $\tilde{\Lambda}$ de $\tilde{P}$ séparante à l'infini telle que pour tout $g \in G$, on ait $g\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}$ ou $g\tilde{\Lambda} \cap \tilde{\Lambda} = \emptyset$. Pour ce faire, nous aurons besoin d'un certain nombre de résultats sur les laminations et les feuilles. On établira ces résultats dans un 2-complexe simplicial $K$ localement fini tel que $H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$.

**Définition 5** ([1], p. 233). *Soit $L$ et $M$ deux laminations de $K$. L'application $j_L + j_M$ vérifie les hypothèses du théorème 1.1 et il existe donc une lamination $S$ telle que $j_S = j_P + j_Q$. Une telle lamination $S$ (définie à équivalence près) sera appelée* somme *de $L$ et $M$ et notée $S = L + M$.*

**Remarque.** Dans le cas où $L \cap M \cap |K^1| = \emptyset$, on peut choisir $S$ comme étant l'unique lamination telle que $S \cap |K^1| = (L \cup M) \cap |K^1|$.

**Définition 6.** *Deux laminations $L$ et $M$ sont dites* compatibles *s'il existe $L' \equiv L$ et $M' \equiv M$ telles que $L' \cap M' = \emptyset$.*

*On écrit alors $L + M = L \oplus M$.*

**Proposition 3.1.** *Soient $t_1$ et $t_2$ deux feuilles minimales de $K$. Soit $S = t_1 + t_2$. Alors $S$ s'écrit $S = s_1 \oplus s_2$, où $s_1$ et $s_2$ sont deux feuilles minimales.*

*Preuve.* Nous allons en fait construire les $s_i$ à partir des ensembles $b_{s_i}$ correspondants, grâce à la proposition 2.2.

Notons $b_i = b_{t_i}$ $(i = 1, 2)$. Considérons les quatre ensembles $b_1 \cap b_2$, $b_1^* \cap b_2$, $b_1 \cap b_2^*$ et $b_1^* \cap b_2^*$. Comme $t_1$ et $t_2$ sont séparantes à l'infini, $b_1$, $b_2$, $b_1^*$ et $b_2^*$ sont infinis. On en déduit que $b_1^* \cap b_2$ et $b_1 \cap b_2^*$ sont tous deux infinis, ou que $b_1 \cap b_2$ et $b_1^* \cap b_2^*$ sont tous deux infinis. Quitte à renommer les $b_i$, on se ramène au cas où $b_1^* \cap b_2$ et $b_1 \cap b_2^*$ sont tous deux infinis. Nous allons montrer que $b_1^* \cap b_2$ et $b_1 \cap b_2^*$ permettent bien de définir des feuilles minimales ayant les propriétés voulues.

$b_1^* \cap b_2$ est infini et $(b_1^* \cap b_2)^*$ aussi (car $b_1 \cap b_2^* \subset (b_1^* \cap b_2)^*$). Par suite, d'après la proposition 2.2, $m(K) \leq |\partial(b_1^* \cap b_2)|$. De même, $m(K) \leq |\partial(b_1 \cap b_2^*)|$.

Soit $\gamma \in \partial(b_1^* \cap b_2)$. Alors $\gamma$ contient au moins un point de $t_1 \cup t_2$, donc $j_S(\gamma) \geq 1$. Il en est de même si $\gamma \in \partial(b_1 \cap b_2^*)$. De plus, si $\gamma \in \partial(b_1^* \cap b_2) \cap \partial(b_1 \cap b_2^*)$, i.e. si $\gamma$ a une extrémité dans $b_1^* \cap b_2$ et l'autre dans $b_1 \cap b_2^*$, alors $\gamma$ contient au moins un point de $t_1$ et un point de $t_2$, donc $j_S(\gamma) \geq 2$.

Par suite,

$$|\partial(b_1^* \cap b_2)| + |\partial(b_1^* \cap b_2)| \leq \|t_1\| + \|t_2\| = 2m(K)$$

et donc $|\partial(b_1^* \cap b_2)| = |\partial(b_1^* \cap b_2)| = m(K)$.

D'après la proposition 2.2, il existe donc deux feuilles minimales $s_1$ et $s_2$ telles que $b_{s_1} = b_1 \cap b_2^*$ et $b_{s_2} = b_1^* \cap b_2$. Comme $b_1 \cap b_2^*$ et $b_1 \cap b_2^*$ sont disjoints, $s_1$ et $s_2$ sont bien compatibles.

Reste à montrer qu'on a bien $t_1 + t_2 = s_1 + s_2$. Si $\gamma \notin \partial b_1 \cap \partial b_2$: alors $j_S(\gamma) = 0$ et $j_{s_1}(\gamma) + j_{s_2}(\gamma) = 0$. Si $\gamma$ a une extrémité dans $b_1^* \cap b_2$ et l'autre dans $b_1 \cap b_2^*$, alors $j_{t_1}(\gamma) = j_{t_2}(\gamma) = 1$ et $j_{s_1}(\gamma) = j_{s_2}(\gamma) = 1$, donc $2 = (j_{t_1} + j_{t_2})(\gamma) = (j_{s_1} + j_{s_2})(\gamma)$. Dans les autres cas, on voit de même que $1 = (j_{t_1} + j_{t_2})(\gamma) = (j_{s_1} + j_{s_2})(\gamma)$. Donc $j_{t_1} + j_{t_2} = j_{s_1} + j_{s_2}$, donc $t_1 + t_2 = s_1 \oplus s_2$. $\square$

**Corollaire 3.2.** *Soient $t_1, t_2, \ldots, t_n$ des feuilles minimales de $K$. Soit $S = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$. Alors $S$ s'écrit $S = s_1 \oplus s_2 \oplus \cdots \oplus s_n$, où les $s_i$ sont des feuilles minimales.*

**Théorème 3.3** ([2], p.455). *Si $K$ admet une feuille mimimale $t$, et si un groupe $H$ agit sur $K$ de sorte que pour toute arête $\gamma$, $H_\gamma$ soit fini, alors il admet une feuille minimale $s$ telle que pour tout $g \in H$ on ait $gs = s$ ou $gs \cap s = \emptyset$.*

*Preuve.* Soit $R = \sum_{g \in H} gt$ (défini par $j_R(\gamma) = \sum_{g \in H} j_t(g^{-1}\gamma)$ pour tout $\gamma \in K^1$.)

Montrons que toutes les feuilles de $R$ sont minimales.

Soit $\gamma_0$ une arête de $K$ fixée. Il existe un sous-complexe $Q$ de $K$ fini tel que si $u$ est une feuille telle que $\|u\| = m(K)$ et $u \cap \gamma_0 \neq \emptyset$, alors $u \subset Q$ et $u \cap \partial Q = \emptyset$.

Soit $A$ l'ensemble des $gt$ qui rencontrent $Q$ (comme $Q$ est fini, $A$ est fini). Soit $R_1 = \sum_{gt \in A} gt$. D'après le corollaire 3.2, $R_1 = s_1 \oplus s_2 \oplus \ldots s_n$ où $n = card(A)$ et où les $s_i$ sont des feuilles minimales. D'autre part, on a $j_R = j_{R_1}$ sur $Q$, d'où $R \cap Q = R_1 \cap Q$.

Soit $s$ une feuille de $R$ qui rencontre $\gamma_0$. Alors $s' = s \cap Q$ est une feuille de $Q$, et on a $s' \in R_1$. Donc il existe $j$ tel que $s' \in s_j$. Or $\|s_j\| = m(K)$ et $s_j \cap \gamma_0 \neq \emptyset$, donc $s_j \in Q$ et $s_j \cap \partial Q = \emptyset$. Par suite, par connexité de $s$, $s \in Q$. Donc $s = s_j$, donc $s$ est minimale.

Ceci est vrai pour toute arête $\gamma_0$ de $K$, donc toutes les feuilles de $R$ sont minimales.

D'autre part, soit $\gamma \in K^1$. On a $j_R(\gamma) = j_R(h_\gamma)$ pour tout $h \in H$. Par suite on peut choisir $R$ de telle sorte que $hR = R$ pour tout $h \in H$. Alors si $u$ est une feuille de $R$ et si $g \in H$, on a $gu = u$ ou $gu \cap u = \emptyset$.

$\square$

Par suite, $\tilde{P}$ admet bien une feuille $\tilde{\lambda}$ ayant les propriétés voulues.

## 4. Application du théorème de Van Kampen

**Théorème** (Stallings). *Si un groupe $G$ de présentation finie a au moins deux bouts, alors il peut s'écrire comme produit amalgamé non trivial ou comme extension HNN au-dessus d'un groupe fini.*

*Preuve.* Si $V$ est une partie de $P$ telle que $\pi_1(V)$ soit défini, on notera $\overline{\pi_1(V)}$ l'image de $\pi_1(V)$ dans $\pi_1(P)$.

Soit $\tilde{\Lambda}$ une feuille de $\tilde{P}$ telle que pour tout $g \in G$, on ait $g\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}$ ou $g\tilde{\Lambda} \cap \tilde{\Lambda} = \emptyset$. Soit $\Lambda$ sa projection dans $P$.

On a $\overline{\pi_1(\Lambda)} = \{g \in G | g\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}\}$, donc par compacité de $\tilde{\Lambda}$, $\overline{\pi_1(\Lambda)}$ est fini.

Soit $\Lambda_\epsilon$ un voisinage tubulaire de $\Lambda$. Alors $P - \Lambda\epsilon$ a au plus deux composantes connexes.

Si $\Lambda_\epsilon$ n'est pas homéomorphe à $\Lambda \times ] - \epsilon, +\epsilon[$, ie ne sépare pas $P$ localement: soit $P_1 = P - \Lambda_\epsilon$, et soit $\Lambda_1$ le bord de $\Lambda_\epsilon$. Alors d'après le théorème de Van Kampen, on a $\pi_1(P) = \overline{\pi_1(\Lambda)} *_{\overline{\pi_1(\Lambda_1)}} \overline{\pi_1(P_1)}$. Or $\overline{\pi_1(\Lambda_1)}$ est d'indice 2 dans $\overline{\pi_1(\Lambda)}$ (qui est fini), donc on obtient bien un produit amalgamé non trivial au-dessus d'un groupe fini.

Supposons désormais que $\Lambda_\epsilon$ est homéomorphe à $\Lambda \times ] - \epsilon, +\epsilon[$.

Si $\Lambda_\epsilon$ ne sépare pas $P$: soit $P_1 = P - \Lambda_\epsilon$. Alors d'après le théorème de Van Kampen, on a: $\pi_1(P) = A *_F$ où $A = \overline{\pi_1(P_1)}$ et $F = \overline{\pi_1(\Lambda_\epsilon)} = \overline{\pi_1(\Lambda)}$ (qui est fini), et donc $G$ est une extension HNN au-dessus d'un groupe fini.

Si $\Lambda_\epsilon$ sépare $P$ en $P_1$ et $P_2$: alors par le théorème de Van Kampen, on a $\pi_1(P) = A *_F B$ où $A = \overline{\pi_1(P_1)}$, $B = \overline{\pi_1(P_2)}$ et $F = \overline{\pi_1(\Lambda_\epsilon)} = \overline{\pi_1(\Lambda)}$. Reste à montrer que dans ce cas, le produit amalgamé obtenu est non trivial, c'est-à-dire que $F \neq A$ et $F \neq B$.

**Lemme 4.1.** *Soit $M \subset L \subset P$ avec $M, L$ compacts, connexes par arc, localements connexes par arc. Soit $\tilde{M}, \tilde{L}$ des composantes connexes respectivement de $p^{-1}(L)$ et $p^{-1}(M)$.*

*Si $\tilde{M}$ est compact et $\overline{\pi_1(M)} = \overline{\pi_1(L)}$, alors $\tilde{L}$ est compact.*

Supposons par l'absurde que $F = A$, ie $\overline{\pi_1(P_1)} = \overline{\pi_1(\Lambda)}$. Soit $\tilde{P}_1$ la composante connexe de $p^{-1}(P_1)$ dont l'adhérence rencontre $\tilde{\Lambda}$. Alors d'après le lemme 4.1, comme $P_1$ est d'adhérence compacte, $\tilde{P}_1$ est d'adhérence compacte. Or $\tilde{P}_1$ est l'une des deux composantes connexes de $\tilde{P} - \tilde{\Lambda}$. En effet, supposons que $\tilde{P}_1$ ait pour bord un autre itéré de $\tilde{\Lambda}$, soit $h\tilde{\Lambda}$. Alors soit $\tilde{\alpha}$ un arc dans $\tilde{P}_1$ entre $\tilde{x}_0$ et $h\tilde{x}_0$. Cet arc se projette en un arc $\alpha$ dans $P_1$. Or comme $\overline{\pi_1(P_1)} = \overline{\pi_1(\Lambda)}$, cet arc est homotope dans $P$ à un arc $\beta$ de $\Lambda$, qui se relève en un arc $\tilde{\beta}$ dans $\tilde{\Lambda}$. Par suite, son extrémité $h\tilde{x}_0$ est dans $\tilde{\Lambda}$, ce qui contredit le fait que $h\tilde{\Lambda} \cap \tilde{\Lambda} = \emptyset$. Donc $\tilde{P}_1$ est l'une des deux composantes connexes de $\tilde{P} - \tilde{\Lambda}$, donc $\tilde{P}_1$ est d'adhérence non compacte. Donc le produit amalgamé obtenu est non trivial.

□


## Remerciements

J'adresse mes remerciements les plus chaleureux a Thomas Delzant pour sa gentillesse, sa disponibilité et sa patience durant ce stage, ainsi qu'à Frédéric Paulin pour ses nombreux conseils, suggestions et corrections.

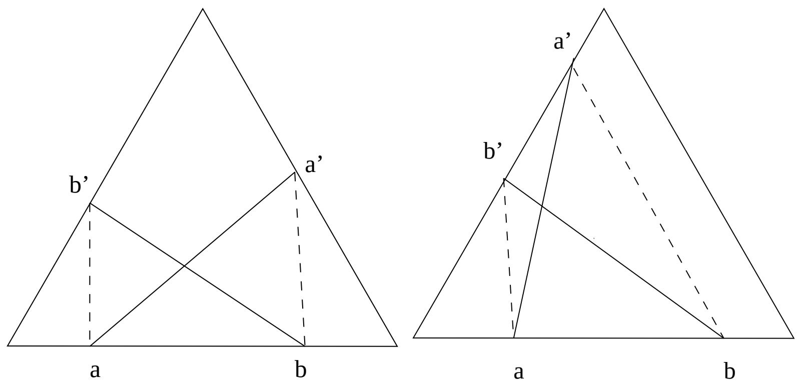


FIGURE 2.

## APPENDICE

Nous avons par ailleurs établi un lemme de convexité qui peut dans certains cas permettre d'exhiber une feuille adaptée á l'action de $G$.

On note $l_t$ la somme des carrés des longueurs des intersections de $t$ avec chaque 2-simplexe, appelée *longueur de* $t$. D'autre part, on notera $d_{[x,y]}$ la longueur d'un segment $[x, y]$ contenu dans un 2-simplexe.

**Définition 7.** *Une feuille est dite* tendue *si:*
*(i) elle est minimale.*
*(ii) elle est de longueur minimale parmi les feuilles vérifiant (i).*

**Lemme 4.2** (convexité). *Soient $s$ et $u$ deux feuilles minimales distinctes.*
*Alors il existe un représentant $L$ de $s + u$ tel que $l_L \leq l_s + l_u$. Si de plus $s \cap u \neq \emptyset$, alors il existe un représentant tel que l'inégalité soit stricte.*

*Preuve.* Nous allons construire un représentant $L$ de $s + u$ à partir de $s \cup u$ en trois étapes, grâce à des opérations qui diminuent la longueur (au sens large).

Soit $\sigma$ un 2-simplexe qui rencontre $s \cup u$. Comme $s$ et $u$ sont minimales, elles intersectent $\sigma$ en au plus un segment chacune.

Trois cas sont possibles:
(1) $\sigma \cap s \cap u = \emptyset$.
(2) $s$ intersecte $u$ à l'intérieur de $\sigma$.
(3) $s$ intersecte $u$ dans le bord de $\sigma$.

Nous allons tout d'abord éliminer le cas (2).

Soit $\sigma$ un 2-simplexe dans le cas (2): on a alors l'un des deux cas représentés sur la figure 2.

Soit $[a, a'] = s \cap \sigma$ et $[b, b'] = u \cap \sigma$. Remplaçons $(s \cup u) \cap \sigma$ par $[a, b'] \cup [a', b]$ (on remarque qu'une telle opération ne modifie pas l'intersection avec les arêtes bordant $\sigma$).

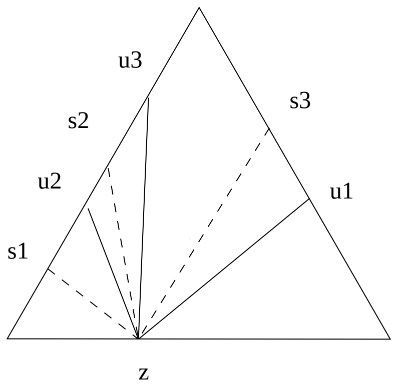


FIGURE 3.

D'après le théorème de Pythagore on a:

$$d^2_{[a,b']} + d^2_{[a',b]} < d^2_{[a,a']} + d^2_{[b,b']}.$$

Au bout d'un nombre fini d'opérations, on a donc éliminé le cas (2). Notons $P$ la réunion de segments obtenue. On a $P \cap K^1 = (s \cup u) \cap K^1$, et $l_P \leq l_s + l_u$, avec une inégalité stricte s'il y avait au moins un 2-simplexe du type (2).

Reste à éliminer le cas (3).

Dans ce cas: soit $\gamma$ une arête contenant un point $z$ de $s \cap u$. On considère alors l'ensemble des 2-simplexes qui contiennent $\gamma$, notons-les $\sigma_1 \dots \sigma_n$. Alors $s$ et $u$ rencontrent respectivement chaque $\sigma_i$ en des segments $[z, s_i]$ et $[z, u_i]$ (cf figure 3).

Nous allons distinguer deux cas:

-(a) pour tout $i$, $s_i = u_i$.

-(b) il existe au moins un $j$ tel que $s_j \neq u_j$.

Comme $s \neq u$, si le cas (3) se présente, il existe au moins une arête dans le cas (b). Nous allons procéder par itération sur les arêtes.

Soit $\gamma$ une arête du type (b). (On remarque que tous les 2-simplexes adjacents à $\gamma$ sont dans le cas (3).)

**Lemme 4.3.** *Soient $k_1, \dots k_n$ tels que $k_i \in \sigma_i$.*

*Alors le seul point $c$ qui minimise $\Sigma_{i=1}^{i=n} d^2_{[c,k_i]}$ est l'isobarycentre des projections orthogonales des $k_i$ sur $\gamma$.*

Orientons $\gamma$ arbitrairement. On notera $x_p$ l'abscisse de la projection orthogonale d'un point $p \in \sigma_i$ sur $\gamma$. Notons $(m_i, p_i)$ la paire $(s_i, u_i)$ ordonnée de telle sorte que $x_{m_i} \leq x_{p_i}$.

Soient $z_1$ et $z_2$ les deux points de $\gamma$ qui minimisent respectivement $d^2_{[z_1,m_1]} + \dots + d^2_{[z_1,m_n]}$ et $d^2_{[z_2,p_1]} + \dots + d^2_{[z_2,p_n]}$.

D'après le lemme 4.3, on a $x_{z_1} < x_{z_2}$, et donc $z \neq z_1$ ou $z \neq z_2$ (dans le cas oú $s$ et $u$ sont tendues, $z$ est en fait le milieu de $[z1, z_2]$). Par minimalité on a donc:

$$\sum_{i=1}^{i=n} d^2_{[z_1,s_i]} + \sum_{i=1}^{i=n} d^2_{[z_2,u_i]} < \sum_{i=1}^{i=n} d^2_{[z,s_i]} + \sum_{i=1}^{i=n} d^2_{[z,i_i]}.$$

Donc si on remplace $P \cap (\cup_{i=1}^{n} \sigma_i)$ par $(\cup_{i=1}^{i=n}[z_1, m_i]) \cup (\cup_{i=1}^{i=n}[z_2, p_i])$ et on note $P'$ la réunion de segments obtenue, on aura:

$$l_{P' \cap (\cup \sigma_i)} < l_{s \cap (\cup \sigma_i)} + l_{u \cap (\cup \sigma_i)}.$$

On a d'autre part $P' \cap (K^1 - \gamma) = P \cap (K^1 - \gamma)$, et donc $l_{P'} < l_P$. D'autre part, les segments de $P' \cap (\cup_{i=1}^{n} \sigma_i)$ ne s'intersectent pas sur $\gamma$ et à l'intérieur des $\sigma_i$, et $P'$ comporte une intersection de moins que $P$. S'il reste des simplexes du type (3) dans $P'$, alors il reste au moins une arête du type (b). On peut donc réitérer une telle opération, et au bout d'un nombre fini d'opérations on aura éliminé tous les 2-simplexes du type (3).

On obtient donc une lamination $L$ telle que $j_L = j_s + j_u$, et telle que $l_L \leq l_s + l_u$, avec une inégalité stricte si $s \cap u \neq \emptyset$. □

**Proposition 4.4.** *Soit $t$ une feuille tendue de $\tilde{P}$. Alors pour tout $g \in G$, on a $gt = t$ ou $gt \cap t = \emptyset$.*

*Preuve.* Comme $t$ est minimale, $gt$ est aussi minimale et on a $l_t = l_{gt}$.

Supposons par l'absurde que $gt \neq t$ et $gt \cap t \neq \emptyset$.

Soit alors $S = gt + t$. D'après la proposition 3.1, on a $S = s_1 \oplus s_2$, où $s_1$ et $s_2$ sont des feuilles minimales.

Or d'après le lemme 4.2, on peut choisir $S$ de telle sorte que $l_S < l_t + l_{gt} =$. Donc $l_{s_1} + l_{s_2} < l_t + l_{gt} = 2l_t$. Donc $min(l_{s_i}) < l_t$, ce qui contredit le fait que $t$ soit tendue.

Par suite, pour tout $g \in G$, $gt = t$ ou $gt \cap t = \emptyset$. □

**Remarque.** La proposition 4.4 n'est pas suffisante pour exhiber une feuille $\tilde{\Lambda}$ ayant les propriétés voulues: en effet, il faudrait d'abord montrer l'existence dans $\tilde{P}$ d'une piste tendue. On peut étendre la défintion des feuilles au cas où celles-ci passent éventuellement par les sommets du 2-complexe, ce qui permet d'obtenir l'existence d'une feuille tendue, mais dans ce cas le lemme de convexité ne permet plus d'obtenir une inégalité stricte dans le cas de deux telles feuilles s'intersectant sur des sommets du 2-complexe. Nous avons donc utilisé le théorème 3.3 pour montrer l'existence d'une feuille $\tilde{\Lambda}$ adaptée à l'action de $G$.

## References


[1] W. Dicks, M. J. Dunwoody, *Groups acting on graphs.*, Cambridge University Press (1986).

[2] M. J. Dunwoody, *The accessibility of finitely presented groups.*, Invent. Math. **81** (1985), 449-457.

[3] H. Freudenthal, *Uber die Enden topologischer Raume und Gruppen*, Math. Zeit **33** (1931), 692-713.

[4] J. R. Stallings, *On torsion-free groups with infinitely many ends.*, Ann. Math. **88** (1968), 312-334.

[5] J. R. Stallings, *Group theory and three-dimensional manifolds.*, Yale Math. monographs no. 4 New Haven: Yale University Press (1971).