Annexe au rapport sur le problème de Riemann-Hilbert

Ceci est une annexe au rapport précédent. Elle contient les démonstrations de certains résultats du rapport, certaines précisions, etc... Sa numérotation est en chiffres romains. La numérotation en chiffres arabes renvoie toujours au rapport lui-même.

I Annexe à la partie 1

I.I Démonstrations de la partie 1.2

Proposition 1 (Unicité du prolongement)
Si (g, V) et (g', V') sont deux prolongements analytiques de f le long de γ, alors sur $V \cap V'$, on a $g = g'$.

Démonstration. Appellons (f_i, U_i) et (f'_i, U'_i) des chaînes permettant de passer de (f, U), respectivement à (g, V) et (g', V'). On considère les intersections $V_i \cap V'_j$, que l'on appelle W_k, l'indexation étant faite de telle sorte que $W_{k-1} \cap W_k$ n'est jamais vide (il n'est pas difficile de se convaincre que c'est possible, on numérote les W_k le long de γ et on utilise (iii)). On note encore f_k (resp. f'_k) la restriction de f_i (resp. f'_j) à W_k si $W_k = V_i \cap V'_j$. On a $W_0 = U$ et $f_0 = f'_0 = f$. Donc f_1 et f'_1 coïncident sur $W_0 \cap W_1$ qui est un ouvert non vide. Comme ce sont des fonctions analytiques elles coïncident sur W_1 tout entier. Ainsi par récurrence finie on a le résultat voulu. □

Proposition 2 (Existence d'un prolongement)
Si f est une solution de (1) sur un disque U, et γ un chemin de x_0 à x_1 dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, f a un prolongement analytique le long de γ.

Démonstration. On note Γ l'image de γ. Autour de chaque point z de Γ, il existe un disque U_z sur lequel (1) a une solution holomorphe f_z. Comme Γ est compact, on peut extraire de (U_z) un sous-recouvrement fini de Γ, $U_{z_1}, \dots U_{z_n}$, avec $z_1 = x_0$ et $z_n = x_1$. On note $U_i = U_{z_i}$ et $f_i = f_{z_i}$. On peut ajuster les f_i de telle sorte qu'on ait $f_{i-1} = f_i$ sur $U_{i-1} \cap U_i$. En effet il suffit de poser :

$$g_i = f_i - (f_i(u_i) - g_{i-1}(u_i))$$

où u_i est un point de $U_{i-1} \cap U_i$. Alors g_n est un prolongement analytique de f le long de γ. □

Proposition 3
Le prolongement d'une solution de (1) est encore une solution de (1).

Démonstration. On reprend les notations de la définition 1. Le système (1) est vérifié sur U par f donc sur $U_1 \cap U_2$ par f_1 et f_2. Mais comme $f'_2(z)$ et

$A(z)f_2(z)$ sont deux fonctions holomorphes qui coïncident sur un ouvert de U_2, elles coïncident sur U_2. Par récurrence finie, f_n est une solution de (1) sur U_n. $\square$

I.II Théorème de Cauchy

Il s'agit ici de montrer le théorème de Cauchy global sur $\widetilde{X}$. On utilise pour cela le lemme suivant :

LEMME
Soit V une surface de Riemann (c'est-à-dire une variété de dimension 1 sur $\mathbf{C}$) simplement connexe, et x_0 un point de V. Pour toute fonction f holomorphe sur V à valeurs dans $\mathbf{C}^n$ il existe une (unique) primitive de f sur V s'annulant en x_0.

DÉMONSTRATION. Si x est un point de V et γ un chemin de x_0 à x, on définit $F(x)$ par :

$$F(x) = \int_\gamma f(u)\,du$$

Cette intégrale représente l'intégrale sur $\mathrm{Im}(\gamma)$ de la 1-forme différentielle (au sens des variétés réelles) $f(u)\,du$. Il faut bien sûr voir que sa valeur ne dépend pas du chemin choisi. Mais comme V est simplement connexe, deux chemins de x_0 à x sont homotopes. Or l'intégrale est invariante par homotopie (...), donc F est bien définie. De plus F est holomorphe. En effet, soit x dans V et (U,φ) une carte locale centrée en x. On lit F dans cette carte : soit $G = F\circ\varphi^{-1}$. Si z est dans $\varphi(U)$ on a :

$$G(z) = F(x) + \int_\gamma f(u)\,du$$

où γ est un chemin de x à $\varphi^{-1}(z)$. Le chemin $\gamma(t) = \varphi^{-1}(tz)$ convient. Donc :

$$G(z) = F(x) + \int_0^1 f\circ\varphi^{-1}(tz)d\varphi^{-1}(tz)\,dt$$

est holomorphe sur $\varphi(U)$. Donc F est holomorphe. Sa dérivée est clairement f donc c'est une primitive de f s'annulant en x_0. $\square$

Une fois qu'on a des primitives, on construit les solutions de (1) de manière itérative : on définit

$$y_0(z) = y_0$$

et

$$y_n(z) = \int_{z_0}^z A(u)y_{n-1}(u)$$

La limite y des y_n, si elle existe, donnera une solution de (1). L'existence locale de cette limite est montrée dans [D] p.373-376. Par recouvrement fini on en déduit l'existence (et l'unicité) de la solution sur tout compact. Ensuite, dans le cas où il y a au moins trois trous, comme le revêtement universel est le disque, on se convainc sans peine que l'on peut définir une solution sur le disque entier simplement en l'identifiant sur chaque disque fermé de rayon $1-1/k$ à la solution sur ce disque. Pour le cas à deux trous, le revêtement universel est $\mathbf{C}$, et on procède de même avec les disques de rayon k ; le cas à un trou est trivial : le groupe fondamental est alors trivial.

II Annexe à la partie 2

II.I Le (2) du théorème 2

L'approche du mathématicien russe I. Lappo-Danileskiĭ est complètement originale ([L-D], traité dans [Be]). Il calcule explicitement, pour un système différentiel à pôles simples donné, les matrices de monodromie en fonction des matrices résidus de A en ses points singuliers ; il en déduit par inversion locale la possibilité d'exprimer ces résidus en fonction de la monodromie, donc la solvabilité du problème (si les matrices sont assez proches de l'identité).
Donnons nous une fonction à valeurs matrices A, méromorphe à pôles simples dans Σ. On peut supposer pour simplifier qu'il n'y a pas de singularité à l'infini, c'est-à-dire que A s'écrit

$$A(z) = \sum_{\alpha \in \Sigma} \frac{A_\alpha}{z-\alpha}$$

avec

$$\sum_{\alpha \in \Sigma} A_\alpha = 0$$

On fixe un point z_0 dans $\pi^{-1}(x_0)$. On note $S(\Sigma)$ l'ensemble des suites finies à valeurs dans Σ, et on considère les fonctions L_σ, définies sur $\widetilde{X}$, indexées par $S(\Sigma)$ et définies par récurrence par :

$$\begin{aligned} L_\emptyset(z) &= 1 \\ L_{(\sigma,\alpha)}(z) &= \int_{z_0}^{z} \frac{L_\sigma(u)}{u-\alpha}\, du \end{aligned}$$

où σ est un élément de $S(\Sigma)$ et α un élément de Σ. Le symbole d'intégration entre z_0 et z désigne l'intégrale le long de n'importe quel chemin de z_0 à z : comme $\widetilde{X}$ est simplement connexe, la valeur sera la même (voir par.1.3). Si $\sigma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, on pose aussi $A_\sigma = A_{\alpha_1} \cdots A_{\alpha_m}$ (et $A_\emptyset = I$). On définit alors la fonction à valeurs matrices $Y(z) = \sum_{\sigma \in S(\Sigma)} L_\sigma(z) A_\sigma$.
Avec ces notations, $Y(z)$ est une matrice fondamentale de solutions de (1). En effet, si l'on admet la convergence de la série, la relation $Y'(z) = A(z)Y(z)$ est

évidente :

$$\begin{aligned} Y'(z) &= \sum_{\alpha\in\Sigma}\sum_{\sigma\in S(\Sigma)} \frac{L_\sigma(z)}{z-\alpha} A_\sigma A_\alpha \\ &= \Big(\sum_{\alpha\in\Sigma} \frac{A_\alpha}{z-\alpha}\Big)\Big(\sum_{\sigma\in S(\Sigma)} L_\sigma(z) A_\sigma\Big) \\ &= A(z)Y(z) \end{aligned}$$

Il faut voir que la série est convergente. C'est l'objet du calcul qui suit.
Si σ est un élément de $S(\Sigma)$ de longueur m, α son dernier terme et τ la suite de ses $m-1$ premiers termes, on a :

$$L_\sigma(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{L_\tau(u)}{u-\alpha}\, du$$

et, en intégrant ceci par parties :

$$L_\sigma(z) = \Big[L_\tau(u)\big(L_\alpha(u) - L_\alpha(z)\big)\Big]_{z_0}^{z} - \int_{z_0}^{z} L'_\tau(u)\big(L_\alpha(u) - L_\alpha(z)\big)\, du$$

On va chercher, pour avoir la convergence de Y, à établir une majoration des L_σ de la forme :

$$|L_\sigma(z)| \leq a_m \frac{|z|^m}{m!} \tag{1}$$

où $\mid z \mid$ est la norme sur le revêtement universel (qui, comme on l'a dit, est D ou $\mathbf{C}$), en s'arrangeant pour que z_0 soit en 0.
Les fonctions $\dfrac{1}{z-\alpha_i}$ sont holomorphes sur $\widetilde{X}$ donc il existe un réel k tel que sur le chemin choisi de z_0 à z on ait :

$$\forall i = 1 \cdots p \qquad \left|\frac{1}{z-\alpha_i}\right| \leq k$$

Si pour les σ de longueur strictement plus petite que m, (3) est vérifiée, alors pour $\sigma = (\tau, \alpha)$ de longueur m :

$$|L'_\sigma(z)| = \left|\frac{L_\tau(z)}{z-\alpha}\right| \leq k a_{m-1} \frac{|z|^{m-1}}{(m-1)!}$$

En supposant toujours (3) vérifiée jusqu'au rang $(m-1)$, revenons à notre calcul initial et majorons L_σ sous la forme obtenue après intégration par parties : le crochet s'annulle (puisque $L_\tau(z_0) = 0$). On a :

$$|L_\alpha(u) - L_\alpha(z)| = \left|\int_u^z \frac{du}{u-\alpha}\right| \leq k(|z| - |u|)$$

On en déduit que :

$$|L_\sigma(z)| \leq \frac{k^2 a_{m-1}}{(m-1)!} \int_{z_0}^{z} |u|^{m-1} |z-u|\, du$$

soit :

$$|L_\sigma(z)| \leq k^2 a_{m-1} \frac{|z|^{m+1}}{(m+1)!}$$

On en déduit facilement que si $|\sigma|$ désigne la longueur de σ, on a :

$$|L_\sigma(z)| \leq k^{|\sigma|} \frac{|z|^{|\sigma|}}{|\sigma|!}$$

Enfin, on va en déduire la convergence de Y : si A désigne un majorant des A_α :

$$\left| \sum_{\sigma \in S(\Sigma)} L_\sigma(z) A_\sigma \right| = \left| \sum_{m \in \mathbf{N}} \sum_{|\sigma|=m} L_\sigma(z) A_\sigma \right| \leq \sum_{m \in \mathbf{N}} \frac{p^m k^m |z|^m A^m}{m!}$$

car il y a p^m suites à m éléments puisque $\mathrm{card}(\Sigma) = p$. Or cette série converge partout absolument (c'est l'exponentielle). Comme le seul terme dans les cœfficients de la série majorante qui dépende de z est k, qui en dépend continûment, on en déduit de bonnes propriétés de continuité et de dérivabilité pour Y.
Une fois cette épine tirée du pied, continuons la démonstration de notre théorème. On a $Y(z_0) = I$ (c'est clair). On note ρ l'action de $\Pi_1(X, x_0)$ sur $\mathbf{C}^n$, par monodromie associée à A. On note aussi γ_α un chemin qui fait un tour autour de α et M_α la matrice dans la base canonique de $\mathbf{C}^n$ de $\rho(\gamma_\alpha)$. Si z_α est l'extrémité du relevé dans $\widetilde{X}$ de γ_α, on a $Y(z_\alpha) = Y(z_0) M_\alpha$ donc $Y(z_\alpha) = M_\alpha$.
On a donc :

$$M_\alpha = \sum_{\sigma \in S(\Sigma)} L_\sigma(z_\alpha) A_\sigma$$

Pour $\sigma = (\beta)$ on a $L_\sigma(z_\alpha) = L_\sigma(z_0) = 0$ si $\alpha \neq \beta$, et $L_{(\alpha)}(z_\alpha) = 2i\pi$. En effet, si $\alpha \neq \beta$, sur X, $\dfrac{1}{u-\beta}$ a une primitive holomorphe en α (c'est une branche du logarithme). Donc :

$$M_\alpha = I + 2i\pi A_\alpha + \sum_{|\sigma| \geq 2} L_\sigma(z_\alpha) A_\sigma$$

L'application (qui va de $M_n(\mathbf{C})^p$ dans lui-même) qui à (A_α) associe (M_α) est donc analytique (c'est la somme d'une série entière). En outre, sa différentielle à l'origine vaut $2i\pi$ fois l'application identique, donc est inversible. Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage de 0 dans $M_n(\mathbf{C})^p$ sur lequel cette application soit un difféomorphisme. Sur l'image de ce voisinage de 0, qui est un voisinage de $(I, I, \ldots, I)$, elle admet donc une réciproque. En d'autres termes, si les matrices M_α sont assez proches de l'identité, il existe un système différentiel dont les M_α soient les matrices de monodromie.

II.II Un exemple de pôle d'ordre arbitrairement grand qui est une singularité régulière

Considérons la fonction méromorphe à valeurs matrices :

$$A(z) = \begin{pmatrix} n/z & 0 \\ 1/z^n & 0 \end{pmatrix}$$

Cherchons les solutions du système correspondant sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix}$$

On doit alors avoir :

$$\begin{cases} x'(z) = \dfrac{n}{z} x(z) \\ y'(z) = \dfrac{x(z)}{z^n} \end{cases}$$

qui se résout en :

$$\begin{cases} x(z) = kz^n \\ y(z) = kz + a \end{cases}$$

Cette fonction est clairement à croissance polynômiale. Donc le système est bien à points singuliers réguliers.

II.III Démonstrations pour la partie 2.2

Lemme utile

Pour tout i, il existe une matrice L_i telle que $\exp(2i\pi L_i) = M_i$. De plus, on peut choisir L_i de telle sorte que ses valeurs propres aient toutes une partie réelle dans $[0, 1[$.

Démonstration. En effet, soit $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$. M est triangulable, il existe P dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ et T triangulaire supérieure telles que $M = PTP^{-1}$. Ecrivons $T = D'T'$ où D' désigne la diagonale de T et T' est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Si $D' = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, prenons μ_i de partie réelle dans $[0, 1[$ tel que $e^{2i\pi\mu_i} = \lambda_i$ et posons $D = \mathrm{diag}\,(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. On a $\exp(2i\pi D) = D'$.
Par ailleurs, cherchons une matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

telle que $\exp(2i\pi N) = T'$. Si l'on exprime $\exp(2i\pi N)$ sous la forme d'une série, on s'aperçoit que les cœfficients de la $k^{\text{ième}}$ sur-diagonale donnent une équation en les $a_{i,j}$ avec $j \leq i + k$. On peut en prenant ces familles d'équations les unes après les autres résoudre par substitution : on en déduit l'existence de N telle que $\exp(2i\pi N) = T'$.

Mais alors $L = D + N$ est telle que $\exp(2i\pi L) = M$ et a des valeurs propres de partie réelle entre 0 et 1. $\square$

PROPOSITION 7
Si dans l'expression précédente les Φ_i sont inversibles (i.e. à valeurs dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$), alors ρ est la représentation de monodromie d'un système à pôles simples en les α_i.

DÉMONSTRATION. Si $Y(y) = \Phi_i(z)(z-\alpha_i)^{N_i}(z-\alpha_i)^{L_i}$ avec $\det \Phi_i(\alpha_i) \neq 0$, alors

$$Y'(y) = \Phi_i'(z)(z-\alpha_i)^{N_i}(z-\alpha_i)^{L_i} + \Phi_i(z)\frac{N_i}{z-\alpha_i}(z-\alpha_i)^{N_i}(z-\alpha_i)^{L_i}$$
$$+\Phi_i(z)(z-\alpha_i)^{N_i}\frac{L_i}{z-\alpha_i}(z-\alpha_i)^{L_i}$$

donc

$$Y'(y) = \Big[\Phi_i'(z)\Phi_i^{-1}(z) + \frac{\Phi_i(z)N_i\Phi_i^{-1}(z)}{z-\alpha_i}$$
$$+\frac{\Phi_i(z)(z-\alpha_i)^{N_i}L_i(z-\alpha_i)^{-N_i}\Phi_i^{-1}(z)}{z-\alpha_i}\Big]Y(y)$$

Comme Φ_i^{-1} est holomorphe au voisinage de α_i, cela montre que Y est matrice fondamentale de solutions d'un système méromorphe à pôles simples. $\square$

III Annexe à la partie 3

III.I Démonstration de la proposition 8

PROPOSITION 8
Si $(y_1, \dots, y_n)$ est une base adaptée de S, la matrice fondamentale de solutions $Y(y)$ dont les colonnes sont les y_i peut s'écrire sous la forme $V(z)z^N z^L$ où la matrice $V(z)$ est bien définie et holomorphe dans D.

DÉMONSTRATION. On définit $V(y) = Y(y)z^{-L}z^{-N}$. Il s'agit de montrer que Φ_i est définie sur X et holomorphe. En effet si γ est un chemin qui fait un tour autour de 0, l'action de γ sur $\log_{\alpha_i}(y)$ donne $\log_{\alpha_i}(y) + 2i\pi$. Donc l'action de γ sur $V(y)$ donne $Y(y)M\exp(-2\pi L)y^{-L}\exp(-2\pi N)z^{-N} = V(y)$. En effet, par définition de L, $\exp(2i\pi L) = M$, et comme N est à cœfficients entiers, $\exp(2i\pi N) = I$. Donc V prend la même valeur dans tous les points conjugués par $\Pi_1(X, x_0)$, donc est définie sur D. Il reste à voir qu'elle y est holomorphe. Pour cela, comme le seul problème qui se pose est en 0, il sufit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $V(z)z^{\varepsilon} \to_{z\to 0} 0$. Le sens de la notation $z \to 0$ est le suivant : la fonction doit tendre vers 0 quand z tend vers 0 dans tout secteur angulaire d'angle strictement inférieur à 2π autour de 0 dans D. Or

$$V(z)z^{\varepsilon} = Y(y)z^{-L}z^{-N}z^{\varepsilon} = \left[Y(y)z^{-N+\frac{\varepsilon}{2}I}\right]\left[z^N z^{-L}z^{-N}z^{\frac{\varepsilon}{2}}\right]$$

Par définition de N et de la base adaptée, le premier facteur va tendre vers 0. En effet, sa $i^{\text{ième}}$ colonne est $y_i(y)z^{-\nu_i+\frac{\varepsilon}{2}}$ qui tend vers 0 par définition de l'ordre, et puisque ν_i est l'ordre de y_i. Pour le deuxième facteur, on utilise le fait que la fonction $z^N(-L)z^{-N}$ est holomorphe : en admettant cette affirmation, on en déduit facilement (il suffit de développer l'exponentielle en séries et de manipuler un peu) que si ε est strictement positif, $z^N z^{-L} z^{-N} z^{\varepsilon}$ tend vers 0 quand z tend vers 0. La fonction $z^N(-L)z^{-N}$ est holomorphe simplement parce que $-L$ est triangulaire supérieure : si

$$-L = \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \ell_{1,2} & \cdots & \ell_{1,n} \\ 0 & \ell_{2,2} & \cdots & \ell_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ell_{n,n} \end{pmatrix}$$

alors

$$z^N(-L)z^{-N} = \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & z^{\nu_1-\nu_2}\ell_{1,2} & \cdots & z^{\nu_1-\nu_n}\ell_{1,n} \\ 0 & \ell_{2,2} & \cdots & z^{\nu_2-\nu_n}\ell_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ell_{n,n} \end{pmatrix}$$

qui est bien holomorphe puisque les ν_i sont classés par ordre décroissant. $\square$

III.II Démonstration de la proposition 9

PROPOSITION 9
On suppose que le système (1) a une singularité régulière à l'origine. Si $A(z)$ a un pôle simple à l'origine, alors sous les notations de la proposition précédente on a : $Y(y) = V(z)z^N z^L$ avec $V(z)$ holomorphe et (c'est le point clé) inversible.

REMARQUE. En fait cette condition est aussi suffisante : voir [B1] p.12 ou [Be] p.110. La nécessité n'est montrée que dans [B1].

DÉMONSTRATION. En remplaçant $Y(z)$ par l'expression de la proposition 8, et en utilisant (1), on obtient facilement :

$$A(z)V(z) = V'(z) + \frac{1}{z}V(z)\left(N + z^N L z^{-N}\right)$$

Cette expression permet d'ailleurs de montrer le sens facile (celui qui ne sert pas ici) de l'équivalence. Mais pour ce qui nous intéresse ici, supposons A à pôles simples et écrivons $A(z) = \dfrac{A}{z} + \Psi(z)$, où Ψ est holomorphe au voisinage de 0. On déduit de la ligne précédente que

$$AV(0) = V(0)Q \tag{2}$$

où $Q = \lim_{z\to 0}(N + z^N L z^{-N})$.

Supposons que V ne soit pas inversible à l'origine, c'est-à-dire que $\det V(0) = 0$. On note $K = \ker V(0)$. On déduit de (5) que Q transforme K en lui-même. On peut donc choisir un vecteur propre v de Q appartenant à K. On a $Qv = \beta_j v$, où β_j est l'une des valeurs propres de Q. Mais les valeurs propres de $N + z^N L z^{-N}$ sont celles de $N + L$, donc celles de Q aussi. Donc $\beta_j = \nu_j + \rho_j$, où les ρ_j sont les valeurs propres de L.
Un calcul facile nous donne la forme de la matrice Q. En effet on a fait plus haut le calcul de $z^N(-L)z^{-N}$; celui de $z^N L z^{-N}$ est identique. Les termes $z^{\nu_i - \nu_j}$ tendent vers 0 si $\nu_i > \nu_j$ et sont identiquement 1 si $\nu_i = \nu_j$. On en déduit que Q s'écrit sous la forme :

$$Q = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \rho_1 & \ell_{1,2} & \cdots & \ell_{1,k_1} \\ 0 & \rho_2 & \cdots & \ell_{2,k_1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \rho_{k_1} \end{matrix} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \begin{matrix} \rho_{k_j+1} & \ell_{k_j+1,k_j+2} & \cdots & \ell_{k_j+1,k_{j+1}} \\ 0 & \rho_{k_j+2} & \cdots & \ell_{k_j+2,k_{j+1}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \rho_{k_{j+1}} \end{matrix} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

où les k_i sont les nombres de fois qu'apparaît ν_i dans la suite des ordres. En d'autres termes, la base adaptée peut s'écrire $(y_1, \ldots, y_{k_1}, y_{k_1+1}, \ldots, y_{k_2}, \ldots, y_{k_s}$ où les termes de y_{k_i+1} à $y_{k_{i+1}}$ ont même ordre. Appellons ces termes successifs une "série".
On considère de nouveau notre vecteur propre v de Q. Montrons que v a des cœfficients non nuls sur une seule série. En effet si v a des cœfficients non nuls sur la $j^{\text{ième}}$ série, soit b le plus grand entier tel que $k_j + b < k_{j+1}$ et $v_{k_j+b} \neq 0$. Alors le cœfficient sur y_{k_j+b} de Qv vaut $(\nu_{k_j+b} + \rho_{k_j+b}$. Cela nous impose donc la valeur propre pour laquelle v est vecteur propre. Mais comme on a toujours $0 \leq \Re(\rho_i) < 1$, cette valeur ne peut pas être atteinte pour d'autres valeurs de ν_i. Cela implique que les cœfficients de v sur toutes les autres séries sont nuls. En d'autres termes, si on appelle w la fonction qui s'écrit v dans la base adaptée (c'est-à-dire la fonction $v_1 y_1 + \cdots + v_n y_n$, ou encore la fonction $Y(y)v$), il existe un ordre ν_j tel que v soit dans S^ν et soit combinaison linéaire des éléments de la base adaptée avec zéro pour les éléments de $S^{\nu_j - 1}$. On en déduit immédiatement $z^{-N} v = v z^{-\nu_j}$ et évidemment ordre$(w) = \nu_j$.
Notons maintenant $L = \widetilde{L} + R$ la décomposition de L avec R diagonalisable et $\widetilde{L}$ nilpotente qui commutent, et $\widetilde{N} = N + R$. La matrice R commute avec N. On a

$$w(y) z^{-\beta_j} = Y(y) v z^{-\beta_j} = V(z) z^N z^L v z^{-\nu_j} z^{-\rho_j}$$

Gràce à la dernière remarque on peut écrire ceci sous la forme :

$$w(y)z^{-\beta_j} = V(z)z^N z^L z^{-N} v z^{-\rho_j} = V(z)z^{\widetilde{N}} z^{\widetilde{L}} z^{-\widetilde{N}} v$$

La deuxième égalité est due au fait que
En développant $z^{\widetilde{L}}$ en série on obtient après calcul :

$$w(y)z^{-\beta_j} = V(z)\left[\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{\ell!}(\log z)^\ell \big(Q - \widetilde{N} + o(z)\big)^\ell\right] v$$

$$w(y)z^{-\beta_j} = V(z)v + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{\ell!}(\log z)^\ell \big[(Q - \widetilde{N})^\ell + o(z)\big] v$$

$$w(y)z^{-\beta_j} = V(z)v + o(z)\left[\sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\ell!}(\log z)^\ell\right] v$$

Comme $0 \leq \Re(\rho_j) < 1$ et $V(0)v = 0$ on a $w(y)z^{-\lambda} \to 0$ pour tout $\lambda < \nu_j + 1$ quand $z \to 0$ sur toute section angulaire d'angle inférieur à 2π. Par définition de l'ordre, on a donc ordre $(w) \geq \nu_j + 1$ ce qui est absurde car on a montré plus haut que w était d'ordre ν_j. L'hypothèse faite est donc absurde et $\det V(0) \neq 0$. $\square$