RAPPORT DE STAGE

Directeur de stage: **M. Karl Oeljeklaus**

Feuilletages de variétés

Laurent Bruasse

juin-juillet 1996

Contents

Le but de ce stage est d'étudier quelques notions concernant les feuilletages de variétés différentiables et analytiques réelles.

Ceci passe par l'étude de la topologie des feuilles, des groupes d'holonomie, pour aboutir au théorème de Haefliger et à la notion d'ensemble minimal.

I Feuilletages de variétés

I.1 Définitions

Un atlas C^r sur une variété M est dit maximal s'il contient toutes les cartes $(\overline{U}, \overline{\phi})$ dont les applications de changement de carte avec les autres cartes (U, ϕ) de cet atlas sont des difféomorphismes C^r: $\overline{\phi} \circ \phi^{-1} : \phi(U \bigcap \overline{U}) \to \overline{\phi}(U \bigcap \overline{U})$. En particulier tout atlas est contenu dans un atlas maximal.

Définition 1 (feuilletage) *Soit M une variété de dimension m. Un feuilletage C^r de dimension n de M est un atlas $\mathcal{F}$, C^r sur M qui est maximal avec les propriétés suivantes:*

(i) si $(U, \phi) \in \mathcal{F}$ alors $\phi(U) = U_1 \times U_2 \subset I\!R^n \times I\!R^{m-n}$ ou U_1 et U_2 sont des disques ouverts.

(ii) si (U, ϕ) et (V, ψ) sont dans $\mathcal{F}$ et $U \bigcap V \neq \emptyset$ alors l'application de changement de cartes $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \bigcap V) \to \psi(U \bigcap V)$ est de la forme:

$\psi \circ \phi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$ si $(x, y) \in I\!R^n \times I\!R^{m-n}$

Soit $(U,\phi) \in \mathcal{F}$ une carte de feuilletage telle que $\phi(U) = U_1 \times U_2 \in I\!R^n \times I\!R^{m-n}$, on appelle *plaques* de $\mathcal{F}$ les ensembles $\phi^{-1}(U_1 \times \{c\}), c \in U_2$. Puisque M est recouverte par des plaques, on peut définir une relation d'équivalence sur M: $p \sim q$ ssi il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n$ n plaques telles que $p \in \alpha_1$ et $q \in \alpha_n$ et $\forall i \in \{1...n\}$, $\alpha_i \bigcap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$. Les classes d'équivalence pour $\sim$ sont appelées *feuilles* de $\mathcal{F}$.

On peut donner une autre définition des feuilletages qui est équivalente:

Définition 2 *Un feuilletage C^r de codimension s sur M est défini par un ensemble maximal de paires (U_i, f_i), $i \in I$ ou les U_i sont des ouverts de M, et les $f_i : U_i \to I\!R^s$ des submersions vérifiant :*

(i) $\bigcup_{i \in I} U_i = M$

(ii) si $U_i \bigcap U_j \neq \emptyset$, il existe g_{ij} difféomorphisme de $I\!R^s$ tel que $f_i = g_{ij} o f_j$ sur $U_i \bigcap U_j$.

Les f_i sont appelées *cartes distinguées* de $\mathcal{F}$

Dans cette définition les plaques de $\mathcal{F}$ sont les composantes connexes des ensembles $f_i^{-1}(c), c \in I\!R^s$.

Soit $S \subset M$ et N deux variétés. On dit que $g : N \to M$ est *transverse à S* si $\forall x = g(y) \in S$, $T_x S + Dg(y).(T_y N) = T_x M$. On dit que g est *transverse à $\mathcal{F}$* si elle est transverse à toutes les feuilles de $\mathcal{F}$.

On démontre alors facilement les deux théorèmes suivants:

Théorème 1 *Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage C^r de M, $(r \geq 1)$, et $g : N \to M$ une application C^r, g est transverse à $\mathcal{F}$ ssi $\forall (U, f) \in \mathcal{F}$, $f \circ g : g^{-1}(U) \to I\!R^s$ est une submersion.*

Théorème 2 *Si g ainsi définie est transverse à $\mathcal{F}$ alors il existe un unique feuilletage de codimension cod($\mathcal{F}$) sur N, noté $g^*(\mathcal{F})$ dont les feuilles sont les composantes connexes des ensembles $g^{-1}(F)$, où F est une feuille de $\mathcal{F}$.*

Nous avons rencontré de nombreux exemples de feuilletages au cours du stage, comme le feuilletage de Reeb de S^3, obtenu par feuilletage du tore solide, ou celui de Hector sur $I\!R^3$.

I.2 Champs de plans et feuilletages

Un k-champ de plans sur une variété M est une application P qui associe à chaque point $q \in M$ un sous-espace vectoriel de dimension k de $T_q M$.

Par exemple, si X est un champ de vecteurs sans singularité sur M, on peut définir le champ de droites P, en posant $P(q) = I\!R.X(q)$, le sous-espace de dimension un de $T_q M$ engendré par $X(q)$.

Définition 3 *On dit qu'un k-champ de plans P sur M est de classe C^r si pour tout $q \in M$, il existe k champs de vecteurs C^r, $X^1, X^2, ..X^k$, définis dans un voisinage V de q, tel que pour tout $x \in V$, $\{X^1(x), .., X^k(x)\}$ est une base de $P(x)$.*

On a alors le résultat suivant:

Proposition 1 *Tout feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension k, C^r sur M^m, définit un k-champ de plans C^{r-1} sur M, noté $T\mathcal{F}$.*

Preuve: Notons $P(x) = T_x\mathcal{F}$ le sous espace de T_xM tangent en x à la feuille de $\mathcal{F}$ passant par x. Etant donné $x_0 \in M$, soit (U, ϕ) une carte locale de $\mathcal{F}$, alors $P(x)$ est le sous-espace engendré par $D_\phi(x)^{-1}(e_i)$, $i = 1, .., k$ où e_i est le i^{eme} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Comme ϕ est C^r, les champs de vecteurs définis sont C^{r-1}, donc P est C^{r-1}.

La question qui se pose alors est la suivante: si on se donne un k-champ de plans P sur M, sous quelles conditions existe-t-il un feuilletage $\mathcal{F}$, de dimension k, tel que $\forall q \in M$, $T_q\mathcal{F} = P(q)$?
La réponse à cette question se trouve dans le **théorème de Froebenius**.

Définition 4 *On dit qu'un champ de plans P est involutif si étant donnés deux champs de vecteurs X et Y tels que $\forall q \in M$, $X(q)$ et $Y(q) \in P(q)$, alors $[X, Y](q) \in P(q)$ ($[,]$ est le crochet de Lie, voir l'annexe A pour plus de détails).*

Théorème 3 (théorème de Froebenius) *Soit P un k-champ de plans C^r sur M, $r \geq 1$. Si P est involutif alors il existe un feuilletage C^r de dimension k sur M tel que $\forall q \in M$ $T_q(\mathcal{F}) = P(q)$. Réciproquement, si $\mathcal{F}$ est un feuilletage C^r ($r \geq 2$) et P le plan tangent de $\mathcal{F}$ alors P est involutif.*

La preuve de ce théorème est décrite dans l'annexe A.
Intéressons nous de plus près aux propriétés des feuilles.

I.3 Résultats préliminaires

Remarquons tout d'abord que chaque feuille F peut être munie d'une structure de variété. En effet étant donné $p \in F$, il existe une carte (U, ϕ) telle que $\phi(U) = U_1 \times U_2$ où U_1 et U_2 sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^s$. Soit α la plaque de U contenant p, en notant $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, on voit clairement que $\overline{\phi} = \phi_1 \mid \alpha : \alpha \to U_1$ est un homéomorphisme. Alors $\mathcal{B} = \{(\alpha, \overline{\phi}) \mid \alpha \subset F$ *est une plaque de U et* $(U, \phi) \subset \mathcal{F}\}$ est un atlas de dimension n sur F.

Si N est une sous variété de M, on dit que N est transverse à $\mathcal{F}$ si N est transverse à toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ (c.-à-d. pour toute feuille F de $\mathcal{F}$ et pour tout $x \in F \bigcap N$, on a $T_xM = T_xN + T_xF$). Si, de plus, $dim(N) + dim(\mathcal{F}) = dim(M)$, on dit que N est une *section transverse* de $\mathcal{F}$.

On a alors les deux théorèmes fondamentaux suivants:

Théorème 4 *Soit F une feuille de $\mathcal{F}$ et q_1, q_2 deux points de F, il existe des sections transverses Σ_1, Σ_2, avec $q_i \in \Sigma_i$ et un difféomorphisme $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ tel que pour toute feuille F' de $\mathcal{F}$, on a $f(F' \bigcap \Sigma_1) = F' \bigcap \Sigma_2$.*

Ceci a des conséquences, résumées dans le théorème suivant:

Théorème 5 *Soit F une feuille de $\mathcal{F}$, et Σ une section transverse de $\mathcal{F}$ telle que $\Sigma \bigcap F \neq \emptyset$. On a alors les trois possibilités:*
(1) $\Sigma \bigcap F$ est discret;
(2) l'adhérence de $\Sigma \bigcap F$ dans Σ contient un ensemble ouvert, on dit que F est localement dense;
(3)$\overline{\Sigma \bigcap F}$ est un ensemble parfait d'intérieur vide. On dit que F est une feuille exceptionnelle.

Holonomie d'une feuille

On notera $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension n et de classe C^r d'une variété M^m.
Soit $\gamma : I = [0, 1] \to F$ une courbe continue et Σ_1, Σ_2 deux sections transverses de $\mathcal{F}$ passant respectivement par $p_0 = \gamma(0)$ et $p_1 = \gamma(1)$. Il existe une suite de cartes appelée *chaîne subordonnée*

à γ, et une partition de $[0,1]$, $0 = t_0 < t_1 < .. < t_{k+1} = 1$ telles que: si $U_i \bigcap U_j \neq \emptyset$ alors $U_i \bigcup U_j$ est contenu dans une carte locale de $\mathcal{F}$, et $\forall i \in \{1,..,k\}$ $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$.

Alors $\forall i \in \{0,..,k+1\}$ on fixe une section transverse à $\mathcal{F}$, $D(t_i) \subset U_{i-1} \bigcap U_i$, homéomorphe à un disque de dimension n et passant par $\gamma(t_i)$.On pose $D(0) = \Sigma_0$ et $D(1) = \Sigma_1$, alors pour x dans $D(t_i)$ proche de $\gamma(t_i)$, la plaque de U_i passant par x rencontre $D(t_{i+1})$ en un unique point $f_i(x)$;

f_i est définie sur un disque $D_i \subset D(t_i)$ contenant $\gamma(t_i)$. Alors la composée $f_\gamma = f_k \circ .. \circ f_0$ est définie dans un voisinage de $p_0 \in \Sigma_0$. f_γ est appelée application d'holonomie associée à γ.

On montre facilement que ceci est indépendant des choix de $D(t_i)$ et de la chaîne subordonnée. De plus si on note ϕ_γ le germe de l'application f_γ, alors si γ_1 et γ_2 sont homotopes $\phi_{\gamma_1} = \phi_{\gamma_2}$, d'où la proposition suivante:

Proposition 1 *Si $p_0 = p_1$ et $\Sigma_0 = \Sigma_1$ alors l'application $\gamma \to \phi_{\gamma^{-1}}$ induit un morphisme: $\Phi : \pi_1(F, p_0) \to G(\Sigma_0, p_0)$, $\Phi([\gamma]) = \phi_{\gamma^{-1}}$ du groupe fondamental de F en p_0 dans le groupe des germes des difféomorphismes C^r de (Σ_0, p_0).*

$Hol(F, p_0) = \Phi(\pi_1(F, p_0))$ est appelé groupe d'holonomie de F en p_0 (ou groupe d'holonomie de F, car il ne dépend pas de p_0).

L'holonomie d'une feuille caractérise le comportement d'un feuilletage aux abords de la feuille considérée, ce qui est bien illustré par les trois théorèmes suivants:

Lemme 1 (Trivialisation globale) *Avec les notations précédentes, soit $\gamma : I \to M$ une application simple, continue dont l'image est contenue dans une feuille F de $\mathcal{F}$. Il existe un voisinage V de $\gamma(I)$ et un difféomorphisme C^r, $h : D^{m-n} \times D^n \to V$ tel que $h^*\mathcal{F}$ soit un feuilletage dont les feuilles sont les surfaces $P^{-1}(y)$ où $P : D^{m-n} \times D^n \to D^n$ est la projection $P(x, y) = y$.*

A partir de ce lemme, on déduit les 2 résultats suivants:

Théorème 6 (stabilité locale) *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage C^1 de codimension n d'une variéte M, et F une feuille compacte dont le groupe d'holonomie est fini. Il existe un voisinage U de F, saturé par $\mathcal{F}$, dans lequel toutes les feuilles sont compactes et ont un groupe d'holonomie fini. Il est possible de définir une rétraction $\pi : U \to F$ telle que pour toute feuille $F' \subset U$, $\pi \mid F' : F' \to F$ est un revêtement tel que tout point de F ait un nombre fini d'antécédents dans F' et $\forall y \in F$, $\pi^{-1}(y) \subset U$ est transverse à $\mathcal{F}$ et homéomorphe à un disque de dimension n. U peut être choisi aussi petit que l'on veut.*

Théorème 7 (stabilité globale) *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage C^1 de codimension un d'une variété compacte connexe M. Soit F une feuille de $\mathcal{F}$ qui a un groupe fondamental fini. Alors toutes les feuilles sont compactes et ont un groupe fondamental fini.*

Nous allons maintenant nous intéresser à des feuilletages analytiques, c'est à dire que toutes les applications de changement de cartes que l'on considère sont supposées analytiques. La question qui se pose alors est : étant donnée une variété, existe-t-il toujours un feuilletage analytique de codimension un ? La réponse est non, l'obstacle à l'existence de tels feuilletages est contenu dans le théorème du paragraphe suivant, dû à Haefliger.

II Le théorème de Haefliger

Théorème 1 (Théorème de Haefliger) *Une courbe fermée transverse à un feuilletage analytique réel de codimension 1 sur une variété analytique réelle* M *engendre un sous-groupe d'ordre infini dans le groupe fondamental π_1(M).*

Ceci découle du théorème suivant:

Théorème 2 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage C^2 de codimension 1 sur une variété M. Supposons qu'il existe une courbe fermée homotope à un point et transverse à $\mathcal{F}$, alors il existe une feuille fermée F de $\mathcal{F}$ et une courbe fermée $\Gamma \subset F$ dont le germe d'holonomie dans un segment J transverse à $\mathcal{F}$, avec $x_0 = J \bigcap \Gamma$, est l'identité sur une des composantes de J-$\{x_0\}$ mais diffère de l'identité sur tout voisinage de x_0 dans J.*

En effet si $\gamma : S^1 \to M$ est une courbe transverse à $\mathcal{F}$ et si sa classe d'homotopie est d'ordre fini alors pour un certain $n \epsilon N$, l'application $\alpha : S^1 \to M$ définie par $\alpha(e^{i\theta}) = \gamma(e^{in\theta})$ est homotope à un point. D'après le Théorème 2, il y a une courbe dans une feuille de $\mathcal{F}$ dont le germe d'holonomie ne peut être analytique (sinon il coïnciderait avec l'identité sur tout J), c'est exclu puisque le feuilletage $\mathcal{F}$ est analytique.

Démonstration du théorème 2:
Introduisons tout d'abord quelques notions:

On dit que $f : M \to \mathbb{R}$, C^2 est *de Morse* si tous ses points critiques -les points où Df s'annule- sont non dégénérés. Si f va de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et x est un point critique de f, cela revient à dire que l'application bilinéaire symétrique associée à $D^2(f)(x)$ est non dégénérée. Si f part d'une variété M, on transpose cette définition en passant par les cartes (cf annexe B pour plus de précision).

Soit M une variété de dimension deux, et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur M. Si p est une singularité de f, on sait d'après le lemme de Morse qu'il existe un voisinage U de p et un système de coordonnées tels que $f(x) = f(p) + x_1^2 + x_2^2$ ou $-(x_1^2 + x_2^2)$ ou $x_1^2 - x_2^2$, dans U. Dans les deux premiers cas, les courbes de niveau de f sont localement des cercles centrés en p et on dit que p est un *centre* de f. Dans le dernier cas, deux courbes δ_1 et δ_2 se rencontrent en p et $\delta_1 \bigcup \delta_2 - \{p\}$ contient quatre courbes $\delta_1 = \alpha_1 \bigcup \alpha_3 \bigcup \{p\}$, $\delta_2 = \alpha_2 \bigcup \alpha_4 \bigcup \{p\}$, ces quatres courbes sont appelées *séparatrices locales* de p, on dit que p est une *selle* de f.

Revenons à la démonstration du théorème. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage C^2 de codimension 1 sur M, et $\gamma : S^1 \to M$ une courbe fermée transverse à $\mathcal{F}$, homotope à un point. Il est possible de définir $A : D^2 \to M$ telle que $A \mid \partial D^2 = \gamma$. On peut toujours supposer que A est C^∞ par le théorème d'approximation de Stone-Weierstrass. $A \mid \partial D^2$ est donc transverse à $\mathcal{F}$.

Soit $f : D^2 \to M$, on dit que $x \in D^2$ est *un point tangent* de f avec $\mathcal{F}$, s'il existe une carte distinguée (U, ϕ) contenant $f(x)$ telle que $D(\phi \circ f)$ s'annule en x.

Proposition 1 *Il existe $g : D^2 \to M$, C^∞, satisfaisant les trois propriétés:*

(i)$g \mid \partial D^2$ est transverse à $\mathcal{F}$ et homotope à γ;

(ii)si $p \in D^2$ est un point tangent de g avec $\mathcal{F}$, il existe (U, π) carte distinguée de $\mathcal{F}$ avec $\pi : U \to \mathbb{R}$, contenant $g(p)$, telle que p est une sigularité non dégénérée de $\pi \circ g : g^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ ($\pi \circ g$ est de Morse). On aura alors un nombre fini de points tangents $T = \{p_1, ..., p_n\}$, car ils sont isolés et contenus dans le disque ouvert D^2.

(iii)$g(p_i)$ et $g(p_j)$ sont contenus dans des feuilles différentes de $\mathcal{F}$ pour $i \neq j$.

La démonstration de ce résultat, assez technique, est développée dans l'annexe B.

On note $\mathcal{F}^* = g^*(\mathcal{F})$. Par construction de g, le nombre de points tangents de g avec $\mathcal{F}$ est fini, et lue dans les cartes, g y est localement de Morse. $\mathcal{F}^*$ est donc un feuilletage de D^2 avec un nombre fini de singularités et transverse à $\partial D^2 = S^1$. Les singularités de $\mathcal{F}^*$ sont soit des centres soit des selles (d'après ii)). Dans ce dernier cas, on sait que localement, quatre courbes s'accumulent en p. On appelera alors *séparatrice* toute feuille de $\mathcal{F}^*$ qui contient une séparatrice locale. Si une séparatrice contient deux selles, on dit que les selles sont *connectées* et que les séparatrices forment une *connection* entre les selles. Par construction, $\mathcal{F}^*$ n'a pas de selles connectées (par iii)).

On dit qu'un tel feuilletage est C^r localement orientable si $\forall p \in D^2$, $\exists U \ni p$ et Y un champ de vecteurs C^r tel que $\forall q \in U - T,\ Y(q) \neq 0$ et Y(q) est tangent à la feuille de $\mathcal{F}^*$ passant par q et si $q \in T,\ Y(q) = 0$.

On dit que $\mathcal{F}^*$ est C^r orientable si Y est défini sur D^2 tout entier. On a alors la proposition suivante:

Proposition 2 *Si $\mathcal{F}^*$ est C^r localement orientable, il est C^r orientable.*

Preuve: Supposons $\mathcal{F}^*$ C^r localement orientable, alors pour tout $p \in D^2$, il existe un champ de vecteurs Y, C^r, défini dans un voisinage U de p tel que Y est tangent à $\mathcal{F}^*$ et $Y(q) = 0$ ssi q est une singularité de $\mathcal{F}^*$. Soit $U_1, .., U_k$ un recouvrement de D^2 par de tels voisinages et $Y_1, .., Y_k$ les champs de vecteurs correspondants.

Il suffit en fait de bien orienter les champs Y_i pour obtenir une nouvelle famille de champs $\tilde{Y_i}$ telle que $\tilde{Y_i}(q)$ *et* $\tilde{Y_j}(q)$ aient la même orientation sur $U_i \bigcap U_j$. Montrons que ceci est possible. On peut supposer que les voisinages U_i sont connexes. Fixons $\tilde{Y_1} = Y_1$ en un point p_1 de U_1. $\forall j > 1$ fixons une courbe $\gamma : [0,1] \to D^2$ telle que $\gamma(0) = p_1$, $\gamma(1) = p_j \in U_j$. Considérons un recouvrement de $\gamma([0,1])$ par des ouverts $(V_i)_{i=1}^n$ assez petits pour que $V_i \bigcap V_j \neq \emptyset$ ssi $j = i+1$, et tels que $\forall i\ V_i \subset U_{i_l}$. On définit alors $\tilde{Y_{l_s}}$ $1 \leq s \leq n$, de manière récursive tel que $\tilde{Y_{l_1}} = Y_1$ et $\tilde{Y_{l_{i+1}}}$ a la même orientation que $\tilde{Y_{l_i}}$. On pose alors $\tilde{Y_j} = \tilde{Y_{l_n}}$. Si on prend une autre courbe $\delta : [0,1] \to D^2$ telle que $\delta(I) \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$, alors la définition de $\tilde{Y_j}$ le long de δ coïncide avec celle de $\tilde{Y_j}$ le long de γ. D^2 étant simplement connexe, on montre facilement que $\tilde{Y_j}$ est indépendant de la courbe choisie.

On prend alors une partition de l'unité $(\phi_i)_{i=1}^k$ et on pose $Y = \Sigma_{i=1}^k \phi_i \tilde{Y_i}$. Puisque $\phi_i \mid (D^2 - U_i) \equiv 0$, le champ de vecteurs $\phi_i \tilde{Y_i}$ s'étend en un champ de vecteurs C^r sur D^2, nul à l'extérieur de U_i. Y vérifie bien toutes les propiétés voulues.

Dans notre cas, en reprenant les notations précédentes, les feuilles de $\mathcal{F}^*$ sont les composantes connexes des courbes de niveau des fonctions $\pi_i \circ g = g_i$. Le champ de vecteurs $Y_i = (\frac{\partial g_i}{\partial x_2}, -\frac{\partial g_i}{\partial x_1})$ est tangent à ces courbes de niveau, $\mathcal{F}^*$ est donc C^1 localement orientable et par conséquent C^1 orientable par un champ de vecteurs Y.

Quitte à prendre $-Y$, on peut supposer que Y pointe vers l'intérieur de D^2 sur ∂D^2 (où Y est transverse à ∂D^2).

Étudions le comportement de Y:

Notons $Y_t(q) = \phi(t,q)$ le flot associé au champ de vecteur Y, $\gamma(t) = Y_t(q)$, (γ est une trajectoire de Y), $\omega(\gamma) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{Y_s(x), s \geq t\}}$, $x \in \gamma$ et $\alpha(\gamma) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\{Y_s(x), s \leq t\}}$, $x \in \gamma$ les ensembles limites de γ.

Si p est une singularité de Y, on a vu que p était soit un centre et alors les trajectoires de Y dans un voisinage V de p sont fermées, ou alors p est une selle et les quatres séparatrices s'accumulent en p. Deux d'entre elles sont caractérisées par le fait que $lim_{t \to \infty} Y_t(q) \to p$ si q appartient à la séparatrice, on dit que la séparatrice est stable, les deux autres vérifient: $lim_{t \to -\infty} Y_t(q) \to p$, on les dit instables.

Définition 1 (graphe) *Un sous-ensemble non-vide, compact, connexe $G \subset D^2$ s'appelle graphe de Y si:*

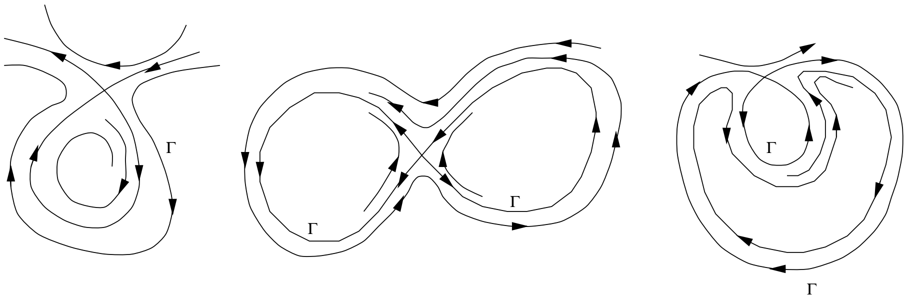
i) G est la réunion de selles et de séparatrices de selles;

ii) Pour une selle $p \in G$, l'ensemble G contient au moins une séparatrice locale stable et une séparatrice locale instable.

D'après le théorème de **Poincaré-Bendixson**, $\omega(\gamma)$ ne peut être qu'une singularité, une orbite fermée ou un graphe de Y. Il en est de même pour $\alpha(\gamma)$, qui peut en outre être vide.

Définition 2 (cycle limite) *Un ensemble $\Gamma \subset D^2$ est un cycle limite de Y si Γ ne se réduit pas à une singularité et s'il existe une orbite γ de Y telle que $\gamma \bigcap \Gamma = \emptyset$ et $\omega(\gamma) = \Gamma$ ou $\alpha(\gamma) = \Gamma$.*

Γ est donc soit une orbite fermée, soit un graphe, d'après ce qui précède. Mais $\Gamma = \omega(\gamma)$, donc Γ est connexe et fermé, d'autre part, $D^2 - \Gamma$ a au moins deux composantes connexes dont l'une contient ∂D^2 (cela vient du fait que Γ est en particulier un ensemble limite). De plus Y n'a pas de selles connectées, donc Γ contient au plus une selle. Les trois seules possibilités à homéomorphisme près sont donc les suivantes:



Notons alors Σ l'ensemble des cycles limites de Y. Si $\Gamma \in \Sigma$ on note $R(\Gamma)$ l'union des adhérences des composantes connexes de $D^2 - \Gamma$ qui ne contiennent pas ∂D^2, $R(\Gamma)$ est alors un compact de

D^2, et est invariant par Y comme Γ. L'idée est de **mettre sur Σ un ordre partiel** $\leq$ défini par: $\Gamma_1 \leq \Gamma_2 \iff R(\Gamma_1) \subset R(\Gamma_2)$, et d'introduire les ensembles suivants:

Proposition 3 *Si $(\Gamma_n)_{n \in I\!N}$ est une suite décroissante de cycles limites et Γ_∞ le bord de $\bigcap_{n \geq 1} R(\Gamma_n)$, alors Γ_∞ est une orbite fermée ou un graphe de Y.*

Preuve: On peut toujours supposer que les Γ_n sont tous distincts. Comme Y n'a qu'un nombre fini de singularités, donc de selles, il y a un nombre fini de graphes. Quitte à enlever un nombre fini de termes, on peut supposer que $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constituée d'orbites fermées.

Alors $(R(\Gamma_n))_{n \in \mathbb{N}}$, est une suite décroissante (pour l'inclusion) d'ensembles homéomorphes à des disques fermés, donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} R(\Gamma_n)$ est non vide, et elle est stable par Y, puisque chaque $R(\Gamma_n)$ l'est. On note alors Γ_∞ le bord de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} R(\Gamma_n)$.

Γ_∞ contient un point q tel que $Y(q) \neq 0$. En effet, il ne peut y avoir de centre dans Γ_∞, car dans le voisinage d'un centre, les orbites de Y sont fermées et il ne peut donc y avoir de cycles limites. Supposons que le point q contenu dans Γ_∞ soit une selle. Sur un voisinage U de q, les quatre séparatrices découpent U en quatre composantes connexes. Une de ces composantes contient une infinité de cycles limites Γ_n qui s'accumulent en q, alors deux séparatrices locales sont contenues dans Γ_∞, et donc au moins deux séparatrices sont contenues dans Γ_∞, puisqu'il est stable par Y.

Supposons alors que Γ_∞ ne soit pas une orbite fermée de Y, considérons $p \in \Gamma_\infty$ tel que $Y(p) \neq 0$. Montrons que $\omega(p)$ est une selle contenue dans Γ_∞. Comme on l'a vu $\omega(p)$ ne peut contenir un centre de Y. Si $\omega(p)$ n'était pas une selle, il contiendrait un point q tel que $Y(q) \neq 0$, puisque $\omega(p)$ est connexe et que les singularités de Y sont isolées.

Γ_∞ n'étant pas une orbite fermée, $q \notin \mathcal{O}(p) = \{Y_t(p) \mid t \in \mathbb{R}\}$. On utilise alors un argument semblable à celui de la preuve de Poincaré-Bendixson. Soit δ un segment transverse à Y contenant q. On sait que $\mathcal{O}(p)$ rencontre δ en une suite monotone $p_n = Y_{t_n}(p)$ où $lim_{n \to \infty} t_n = \infty$ et $lim_{n \to \infty} p_n = q$. Notons η la courbe fermée de D^2 constituée des segments $[p_n, p_{n+1}]$ et de $\mu = \{Y_t(p) \mid t_n \leq t \leq t_{n+1}\}$ et soit Δ la composante connexe de $D^2 - \eta$ qui contient q. Une orbite qui coupe $[p_n, p_{n+1}]$ ne peut être fermée car elle pénètre dans la région Δ et ne peut en resortir. p_n ne peut donc pas être point d'accumulation d'orbites fermées ce qui est une contradiction car $p_n \in \Gamma_\infty$. Donc $\omega(p)$ est une selle. De manière analogue $\alpha(p)$ est une selle.

Remarquons que puisqu'une selle contenue dans Γ_∞ est point d'accumulation d'orbites fermées de Y, Γ_∞ contient au moins une séparatrice stable et une instable, car l'orientation de Y est continue. Donc Γ_∞ est un graphe.

On introduit alors un ensemble plus grand $\overline{\Sigma}$, l'ensemble des cycles limites de Y auxquels on ajoute tous les ensembles Γ_∞ construits dans la proposition 3. $\overline{\Sigma}$ est non vide car si $p \in \partial D^2$, $\omega(p)$ est un cycle limite. Par la Proposition 3, $\leq$ est inductive sur $\overline{\Sigma}$, ce qui permettra d'utiliser le **lemme de Zorn**: $\overline{\Sigma}$ a un élément minimal Γ bordant $R(\Gamma)$, dont l'intérieur ne contient pas de cycles limites, c'est à dire si $p \in R(\Gamma)$, $\mathcal{O}(p)$ est soit une singularité, soit une orbite périodique ou est contenu dans un graphe.

On considère maintenant un segment δ transverse à Y, coupant Γ en un point p tel que $Y(p) \neq 0$ (qui existe bien comme on l'a vu).

Deux cas se présentent alors: Γ étant élément de $\overline{\Sigma}$, c'est soit une orbite fermée, soit un graphe.

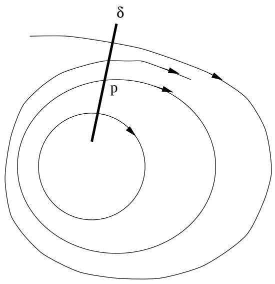


figure 1

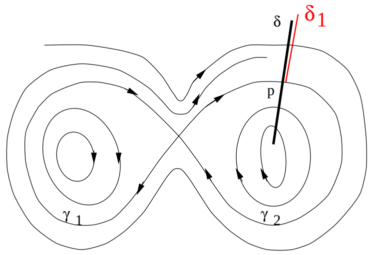


figure 2

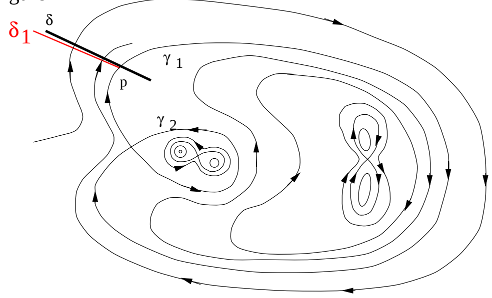


figure 3

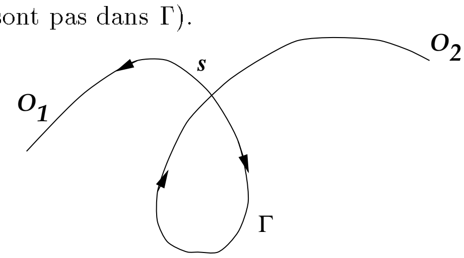
1^e **cas**(figure 1): Γ est une orbite fermée. On peut donc construire une holonomie $f : \delta_1 \subset \delta \to \delta$ qui est l'identité sur $\delta \bigcap R(\Gamma)$, mais qui diffère de l'identité sur tout voisinage de p. En effet si δ_1 est un petit segment inclu dans δ, on peut le choisir assez petit pour qu'il ne rencontre que des orbites fermées à l'intérieur de $R(\Gamma)$, puisque $R(\Gamma)$ est minimal, l'holonomie f est donc triviale à l'intérieur de $R(\Gamma)$. Puisque Γ est soit un cycle limite, soit un Γ_∞, il y a des orbites non fermées aussi proches de Γ que l'on veut, donc f n'est pas l'identité sur tout voisinage de p dans δ. On pose $\mu = g(\Gamma)$ et $\eta = g(\delta)$. μ est une courbe fermée dans $F \in \mathcal{F}$ dont l'holonomie est donnée par $h(x) = g \circ f \circ (g \mid \delta_1)^{-1}(x)$. h est l'identité sur une des composantes de $\eta - g(p)$, mais diffère de l'identité sur tout voisinage de $g(p)$ dans η.

2^{eme} **cas**(figures 2 et 3): Γ est un graphe de Y. On peut comme précédemment définir une holonomie f sur $\delta_1 \subset \delta - (\delta \bigcap R(\Gamma))$ où δ_1 est un petit segment contenu dans δ, mais sur $\delta \bigcap (R(\Gamma))$ la transformation que l'on construirait de la même manière ne correspondrait pas à la courbe Γ.

Toutefois $g(\delta)$ est transverse à $\mathcal{F}$ et l'holonomie h correspondant à $g(\Gamma)$ reste conjuguée à f sur $g(\delta_1)$, c'est à dire: $h = g \circ f \circ (g \mid (\delta_1))^{-1}$, or comme dans le premier cas, la minimalité de Γ implique que les orbites à l'intérieur de $R(\Gamma)$ sont fermées, donc dans les deux cas (Γ est un cycle limite, ou il est limite de cycles limites), les orbites extérieures à Γ ne sont pas fermées, donc h n'est pas l'identité au voisinage de $g(p)$. Nous allons montrer que sur un segment δ_2 contenant p et inclu dans $\delta \bigcap R(\Gamma)$, $h \mid g(\delta_2)$ est l'identité.

Notons s la selle contenue dans Γ. Soit γ une orbite de Y incluse dans Γ, alors d'après la définition d'un cycle limite et la preuve de la proposition 3, $\omega(\gamma) = \alpha(\gamma) = \{s\}$. Γ contient donc une ou deux orbites, chaque orbite étant formée de deux séparatrices de s.

Dans le cas où Γ contient une seule orbite les deux autres séparatrices de s sont contenues dans $R(\Gamma)$, en effet un graphe comme celui de la figure ci-contre ne peut être un élément minimal de $\overline{\Sigma}$ (dans la figure $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ ne sont pas dans Γ).



Preuve par l'absurde: supposons que Γ soit un cycle limite. Une orbite extérieure à $R(\Gamma)$ s'accumulerait sur Γ sans couper $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$, alors l'orientation de $\mathcal{F}^*$ ne serait pas continue, ce qui est exclu. Il en est de même si Γ est une limite décroissante de cycles limites.

Cela implique en particulier que les deux séparatrices de s qui ne sont pas contenues dans Γ sont connectées. Elles forment une même orbite. En effet si m est un point d'une de ces séparatrices, $\omega(m) = \alpha(m) = \{s\}$, car ce ne peut être qu'une singularité. Sinon, les séparatrices étant dans l'intérieur de $R(\Gamma)$, ce dernier contiendrait un cycle limite ce qui contredirait sa minimalité. De plus, il n'y a pas de selles connectées.

En résumé, les séparatrices de $\{s\}$ sont connectées par paires. Elle forment des courbes fermées $\gamma_1 \bigcup \{s\}$ et $\gamma_2 \bigcup \{s\}$. On a 2 possibilités: $\Gamma = \gamma_1 \bigcup \gamma_2 \bigcup \{s\}$ ou $\Gamma = \gamma_1 \bigcup \{s\}$, $\delta \bigcap \gamma_1 \neq 0$.

Plaçons nous dans le premier cas (figure 2):

On prend δ' un segment transverse à Y tel que $\delta' \bigcap \gamma_2 \neq \emptyset$, on pose $\delta_2 = R(\Gamma) \bigcap \delta$, $\delta_2' = R(\Gamma) \bigcap \delta'$. On définit alors $f_1 : \delta_2 \to \delta_2$ et $f_1' : \delta_2' \to \delta_2'$ comme précédemment, les orbites de Y à l'intérieur de $R(\Gamma)$ étant fermées, par minimalité de Γ, ces applications sont l'identité. On pose $\mu_1 = g(\gamma_1 \bigcup \{s\})$, $\mu_2 = g(\gamma_2 \bigcup \{s\})$, h_1, h_2 les holonomies correspondantes, définies sur des segments inclus dans $g(\delta)$ et $g(\delta')$. Alors $h_1 \mid g(\delta_2)$ et $h_1' \mid g(\delta_2')$ sont conjuguées à f_1 et f_1' et par conséquent sont l'identité sur $g(\delta_2)$ et $g(\delta_2')$. L'holonomie de $g(\Gamma)$ est la composée de celle de μ_1 et μ_2 et vaut donc l'identité sur $g(\delta_2)$.

L'autre cas est analogue.

Le théorème 2 est donc démontré.

On obtient comme conséquence du théorème de Haefliger le résultat suivant:

Théorème 3 *Soit M une variété analytique, compacte, avec un groupe fondamental fini. Alors il n'y a pas de feuilletage analytique de codimension un sur M.*

En particulier, il n'y a pas de feuilletage analytique de codimension un sur S^3.

III Fibré et ensemble minimal

Nous nous sommes ensuite intéressés à une autre façon de caractériser les feuilletages: la recherche d'un *ensemble minimal* (s'il existe) et l'étude de certaines de ses propriétés.

III.1 Ensemble minimal d'un feuilletage

Définition 1 *Soit A un sous ensemble de M, on appelle saturation de A l'ensemble $\bigcup_{x\in A} F_x$ où F_x est la feuille de $\mathcal{F}$ passant par x. On dit que A est invariant s'il est sa propre saturation.*

Définition 2 (ensemble minimal) *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage d'une variété M. On dit que $\mu \subset M$ est minimal si:*

i) μ est fermé, non vide et invariant.

ii) si $\mu' \subset \mu$ est fermé, invariant alors soit $\mu' = \emptyset$ soit $\mu' = \mu$.

exemple:

Toute feuille fermée est un ensemble minimal

Théorème 1 *Tout feuilletage d'une variété compacte possède un ensemble minimal.*

Preuve: Soit M une variété compacte et $\mathcal{F}$ un feuilletage sur M. Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties compactes non vides de M , invariantes par $\mathcal{F}$. Il est évident que $\mathcal{C}$ est non vide. Si F est une feuille de $\mathcal{F}$, alors $\overline{F}$ est dans $\mathcal{C}$. On considère sur $\mathcal{C}$ l'ordre partiel induit par l'inclusion. Etant donné une suite $\mu_1 \supset \mu_2 ... \supset \mu_n$ d'éléments de $\mathcal{C}$, on a que $\mu = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mu_i$ est non vide, invariant et compact, de plus $\mu \subset \mu_i$ $\forall i$. $\mathcal{C}$ est donc inductif et par le lemme de Zorn, $\mathcal{C}$ contient un élément minimal. C'est un ensemble minimal de M.

Théorème 2 *Soit μ un ensemble minimal de $\mathcal{F}$:*

i) toute feuille de $\mathcal{F}$ contenue dans μ est dense dans μ;

ii) Soit $p = cod(\mathcal{F})$ et Σ un disque de dimension p transverse à $\mathcal{F}$ tel que $\mu \bigcap \Sigma \neq \emptyset$. Si μ n'est pas une feuille fermée, alors $\mu \bigcap \Sigma$ est un ensemble parfait.

iii) Soit de plus $p = 1$. On suppose que $\partial\Sigma \bigcap \mu \neq \emptyset$ et que μ est d'intérieur vide mais n'est pas une feuille fermée. Alors $\mu \bigcap \Sigma$ est homéomorphe à un ensemble de Cantor. On dit que μ est un ensemble minimal exceptionnel.

En effet :

i) Soit F une feuille de $\mathcal{F}$ contenue dans μ. Alors $\overline{F}$ est fermée, non nulle et $\overline{F} \subset \mu$, comme μ est invariant. Donc par minimalité, $\overline{F} = \mu$.

ii) Soit $x \in \Sigma \bigcap \mu$, et F la feuille de F passant par μ. Puisque μ n'est pas une feuille fermée, il existe une feuille $F' \neq F$, contenue dans μ. En prenant une carte locale du feuilletage et en utilisant i), on voit que x est un point d'accumulation de $F' \bigcap \Sigma$.

iii) par ii) , $\mu \bigcap \Sigma$ est un compact, parfait d'intérieur vide dans Σ. Il est donc homéomorphe au Cantor.

L'étude des ensembles minimaux a pris beaucoup d'importance dans la théorie des feuilletages. De nombreux mathématiciens se sont par exemple occupés des feuilletages du tore T^2. C'est ainsi que Denjoy a démontré le théorème suivant:

Théorème 3 *Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage C^2 du tore et μ un ensemble minimal de $\mathcal{F}$ alors soit $\mu = T^2$ soit μ est une feuille compacte.*

Denjoy donna également un exemple de construction d'un feuilletage C^1 du tore, qui possédait un ensemble minimal exceptionnel.

III.2 L'exemple de Denjoy

Définissons tout d'abord la suspension d'un difféomorphisme $f : N \to N$, C^r. On considère sur $N \times \mathbb{R}$ la relation d'équivalence suivante: $(x,t) \sim (x',t') \iff (\exists n \in \mathbb{Z}\,,\ t'-t = n \ et\ x'-x = f^n(x))$. On pose $M = (N \times \mathbb{R})/\sim$ et π la projection associée à la relation d'équivalence. Il est facile de voir qu'on peut munir M d'une structure de variété C^r de dimension $dim(N)+1$. On voit également que le feuilletage produit sur $N \times \mathbb{R}$ dont les feuilles sont les $\{x\} \times \mathbb{R},\ x \in N$ passe au quotient en un feuilletage $\mathcal{F}_0$ de M. Les propriétés de f vont alors se transporter sur le feuilletage $\mathcal{F}_0$ qui est appelé *suspension de f*. En effet, notons $N_0 = \pi(N \times \{0\})$, N_0 est une sous variété de M, soit $y \in N_0$ et F_y la feuille de$\mathcal{F}_0$ passant par $y = \pi(x,0)$, elle peut être paramétrisée par $\gamma(t) = \pi(x,t)$. On peut alors définir une fonction de premier retour qui, à y, associe le point $\pi(x,1)$ où F_y recoupe N_0. En remarquant que $\pi(x,1) = \pi(f(x),0)$, on voit que si x est un point périodique de f $(\exists k \in \mathbb{Z}\ f^k(x) = x)$ alors la feuille de $\mathcal{F}_0$ contenant $\pi(x,0)$ est une courbe fermée qui coupe N_0 k fois. Si l'orbite de x est dense dans N, alors la feuille correspondante sera dense dans M.

L'idée de Denjoy est de prendre un C^1 difféomorphisme $f : S^1 \to S^1$ possédant un ensemble minimal exceptionnel (c'est à dire un ensemble fermé, non vide stable par f et minimal pour ces propriétés). On prend ensuite la suspension de f pour obtenir le résultat escompté.

La construction du difféomorphisme se fait de la façon suivante: on prend une rotation irrationnelle $R_\alpha(e^{2\pi it}) = e^{2\pi i(t+\alpha)}$, on coupe le cercle S^1 aux points $\{\theta_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ d'une orbite de R_α. On insére un segment J_n de longueur l_n tel que $\Sigma_{n=-\infty}^{+\infty} l_n = L < \infty$ pour obtenir un nouveau cercle de longueur supérieure à l'ancien, tel que $\mu = S^1 - \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} J_n$ soit homéomorphe au Cantor. f sera choisie conjuguée à R_α de sorte que l'orbite de tout point de μ soit dense dans μ. On aura alors le résultat souhaité. Les détails de la construction se trouvent dans l'annexe C.

On peut ensuite s'intéresser aux feuilletages de codimension un sur des variétés de dimension supérieure à trois. C'est ainsi que Sacksteder a construit un feuilletage C^∞ de codimension un sur une variété de dimension 3 possédant un ensemble minimal exceptionnel, montrant par la même que le théorème de Denjoy se généralise mal. Il nous faut d'abord introduire quelques notions avant de voir l'exemple de Sacksteder.

III.3 Fibrés et exemple de Sacksteder

Définition 1 (Fibré) *Un fibré consiste en un ensemble de variétés E,B,F et en une application différentiable $\pi : E \to B$, tel que E ait une structure locale de produit définie par un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de B par des ouverts et des difféomorphismes $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F,\ i \in I$, tel que $\pi = p \circ \phi_i$ où $p : U_i \times F \to U_i$ est la projection sur le premier facteur. E est appelé l'espace total, B la base et F la fibre du fibré. On note (E, π, B, F) ce fibré.*

Choisissons deux ouverts U_i, U_j tels que $U_i \bigcap U_j \neq \emptyset$, on peut alors définir $g_{ij} : U_j \bigcap U_j \to Diff(F)$. En effet soit $\Phi_{ij} : (U_i \bigcap U_j) \times F \to (U_i \bigcap U_j) \times F$ telle que $\Phi_{ij}(x,y) = \phi_j \circ \phi_i^{-1}(x,y) = (x, h_{ij}(x,y))$.

Alors l'application $h_{ij}^x : F \to F$ définie par $y \to h_{ij}(x,y)$ est un difféomorphisme. On pose $g_{ij}(x) = h_{ij}^x$.
On dit que le fibré E a un groupe de structure discret si pour tout i,j l'application $x \to h_{ij}^x$ est localement constante.
Le fibré tangent et le fibré unitaire tangent sont deux exemples de telles structures.

Définition 2 *On dit qu'un feuilletage $\mathcal{F}$ de E est transverse aux fibres si:*
i) pour tout p dans E, la feuille L_p de $\mathcal{F}$ passant par p est transverse à la fibre $F_{\pi(p)}$ ($F_{\pi(p)} = \pi^{-1}(p)$) et $dim(\mathcal{F}) + dim(F) = dim(E)$;
ii) pour toute feuille L de $\mathcal{F}$, $\pi \mid L : L \to B$ est un revêtement.

Remarque: En fait Ehresmann a observé que si F est compacte alors i) implique ii).

On peut alors définir l'holonomie de $\mathcal{F}$: si $\mathcal{F}$ est C^r, il existe un morphisme de groupes $\Phi : \pi_1(B,b) \to Diff^r(F) \simeq Diff^r(\pi^{-1}(b))$ appelée holonomie de $\mathcal{F}$: si $\alpha : I = [0,1] \to B$, $\alpha(0) = \alpha(1) = b$ et $y \in \pi^{-1}(b)$. Puisque $\pi \mid L_y : L_y \to B$ est un revêtement, il existe un unique chemin $\overline{\alpha_y} : I \to L_y$ tel que $\overline{\alpha_y}(0) = y$ *et* $\pi \circ \overline{\alpha_y} = \alpha^{-1}$, en identifiant F à $\pi^{-1}(b)$ on définit $\phi_\alpha : F \to F$ par $\phi_\alpha(y) = \overline{\alpha_y}(1)$. On voit que $\phi_\alpha(y)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de α, et on pose $\Phi([\alpha]) = \phi_\alpha$.

Suspension d'une représentation: On se donne deux variétés B, F et un morphisme ϕ du groupe fondamental de B dans le groupe des difféomorphismes de F. On se demande alors s'il existe un fibré E et un feuilletage $\mathcal{F}$ transverse aux fibres dont l'holonomie serait ϕ. La réponse est oui:

Théorème 1 *Soit B et F, deux variétés connexes, et $\phi : \pi_1(B,b_0) \to Diff^r(F)$ un morphisme de groupes. Alors il existe un fibré (E_ϕ, π, B, F) et un feuilletage $\mathcal{F}_\phi$ transverse aux fibres de E_ϕ dont l'holonomie est ϕ. Le fibré E_ϕ a un groupe de structure discret.*

On dit que deux représentations $\phi : \pi_1(B,b_0) \to Diff(F)$ et $\phi' : \pi_1(B,b_0) \to Diff(F')$ sont C^s conjuguées si $\exists h : F \to F'$ un difféomorphisme C^s tel que $\forall g \in \pi_1(B,b_0)$ $\phi(g) = h^{-1} \circ \phi'(g) \circ h$. On a alors le résultat suivant.

Théorème 2 (Unicité d'une suspension) *Soit ϕ et ϕ' deux représentations C^s conjuguées définies comme précédemment. Il existe un difféomorphisme C^s, $H : E_\phi \to E_{\phi'}$ vérifiant:*
i) $\pi' \circ H = \pi$ et par conséquent H envoie les fibres de E_ϕ sur les fibres de $E_{\phi'}$;
ii) H envoie les feuilles de $\mathcal{F}_\phi$ sur les feuilles de $\mathcal{F}_{\phi'}$.

On dira que deux fibrés sont C^s équivalents s'il existe un C^s difféomorphisme $H : E \to E'$ tel que $\pi' \circ H = \pi$.

A partir de ces deux résultats, on peut montrer un résultat assez intéressant sur l'existence de feuilletages transverses aux fibres.

Théorème 3 *Soit (E,π,B,F) un fibré. Il existe un feuilletage sur E transverse aux fibres si et seulement si (E,π,B,F) est équivalent à un fibré avec un groupe de structure discret.*

La construction de Sacksteder

Il s'agit de construire un feuilletage C^∞ d'une variété compacte de dimension 3, qui possède un ensemble minimal exceptionnel.

Soit V_2 une surface compacte orientable de genre 2. Le groupe fondamental de V_2 est un groupe non abélien engendré par 4 courbes fermées a,b,c,d. La seule relation liant ces 4 courbes étant $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = 1$.

Soit G le sous-groupe de $\pi_1(V_2)$ engendré par a et c. Il est libre car il n'y a aucune relation entre a et c. Si on se donne deux difféomorphismes f et g de S^1, il est possible de définir $\phi : G \to Diff^\infty(S^1)$ en posant $\phi(a) = f, \phi(c) = g$. Ce morphisme va induire un morphisme $\phi : \pi_1(V_2) \to Diff^\infty(S^1)$ en posant $\phi(b) = id_{S^1}; \phi(d) = id_{S^1}$, il est facile de voir que ceci est bien défini.

On prend alors $\mathcal{F}_\phi$ la suspension de ϕ. Le fibré E_ϕ sur le quel $\mathcal{F}_\phi$ est défini est homéomorphe à $V_2 \times S^1$. Alors $\mathcal{F}_\phi$ a un ensemble minimal exceptionnel ssi l'action de groupe de G sur S^1 définie par f et g possède un ensemble minimal homéomorphe au Cantor. Comme dans l'exemple de Denjoy, il suffit alors de construire f et g, conservant l'orientation et tels qu'il existe K dans S^1 homéomorphe au Cantor et stable par l'action de G. Les détails de la construction se trouvent dans l'annexe D.

Sacksteder a d'ailleurs démontré en 1965, le théorème suivant:

Théorème 4 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension un, C^2 sur une variété compacte M^m $(m \geq 2)$. Supposons que $\mathcal{F}$ ait un ensemble minimal exceptionnel μ, alors il existe une feuille $F \subset \mu$ et une courbe fermée $\gamma : I \to F$ telle que, si f est le germe d'holonomie de γ dans un segment transverse Σ passant par $p = \gamma(0) = \gamma(1)$, alors $f'(p) < 1$. En particulier, l'holonomie de F est non triviale.*

Nous avons vu à la fin du stage un théorème important concernant les variétés de dimension trois:

Théorème 5 (Théorème de Novikov) *Tout feuilletage C^2 de codimension un sur une variété compacte de dimension trois dont le groupe fondamental est fini, a une feuille compacte.*

References

[1] César CAMACHO, Alcides Lins NETO. *Geometric theory of foliations*. Birkhäuser, (1985).

[2] Morris W. HIRSCH. *Differential Topology*. Graduate Texts in Math.,Springer Verlag, (1976).

[3] J. MILNOR. *Morse theory*. Princeton University Press, (1963).

[4] FORSTER. *Riemansche Flächen*. Spinger Verlag.