Résumé : *La question qui a motivé cette étude était de savoir si les différents invariants associés à un schéma projectif tels que son groupe de Picard, ses groupes de K-théorie ou ses groupes de Chow étaient égaux à ceux de son cône. On se propose pour comprendre les relations entre ces invariants de comparer dans un premier temps la régularité en un sens faible (Normalité) d'un schéma projectif et de ses différents cônes associés. Puis on cherche à relier les groupes de K-théorie de ce schéma et de ses cônes associés. On démontre au passage le théoréme d'égalité du K_0 des faisceaux cohérents et des fibrés sur un schéma lisse et on en tire quelques conséquences pour des cônes sur un schéma lisse. Utilisant les résultats précédents on montre alors la trivialité du groupe de Picard d'un cône normal . Et on arrive finalement à caractériser la normalité du cône grace a son goupe de Picard.*

0.1. Préliminaire. Tous les schémas considérés sont de type fini au dessus d'un corps algébriquement clos k. Si $\mathfrak{X}$ est un schéma $K_0(\mathfrak{X})$ et $K_0'(\mathfrak{X})$ désignent respectivement le groupe de Grothendieck des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-modules localement libres et celui des faisceau cohérents sur $\mathfrak{X}$.
On renvoie à l'annexe pour les propriétés de K_0 et K_0'.

1. Définitions et premiéres propriétés des cônes

1.1. Définitions. Soit $\mathfrak{X} \stackrel{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$ un Schéma projectif. On définit le cône affine sur $\mathfrak{X}$ comme étant le schéma affine $\mathcal{C} = \mathcal{S}\mathrm{pec}(S) \subset \mathbb{A}^{n+1}$ où $S = \bigoplus_{d\geq 0} \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))/\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}(d))$ $= k[X_0, \dots, X_n]/I$ est l'anneau homogène de $\mathfrak{X}$ et où $\mathfrak{I}_{\mathfrak{X}} = \widetilde{I} = \ker(i^{\#} \colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to i_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$. On a alors $\mathfrak{X} \cong \mathcal{P}\mathrm{roj}(S)$ et I est saturé.

Si $\mathfrak{L}$ est un fibré inversible ample sur le schéma projectif $\mathfrak{X}$ on définit le cône sur $\mathfrak{L}$ comme étant le schéma affine $\mathcal{C}' = \mathcal{S}\mathrm{pec}(S')$ où S' est l'anneau gradué $\bigoplus_{d\geq 0} \Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{L}^{\otimes d})$.

1.2. Relations entre les deux cônes. Dans le cas où $\mathfrak{L}$ est le fibré très ample $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(1)$ associé à $\mathfrak{X}$. On a les relations suivantes entre les deux cônes :
Considérons la suite exacte associée à $\mathfrak{X}$:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{I}_{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{i^{\#}} i_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \longrightarrow 0$$

Qui donne $\forall d \in \mathbb{Z}$ en tensorialisant par $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(d)$ localement libre:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}(d) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(d) \longrightarrow 0$$

Et donc en cohomologie :

(1)

$$\boldsymbol{0 \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}(d)) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(d)) \longrightarrow H^1(\mathfrak{X}, \mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}(d))}$$

$$\boldsymbol{\longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \longrightarrow \dots}$$

On a donc une inclusion $\boxed{\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))/\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}(d)) \hookrightarrow \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(d))}$. Cependant $\mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}$

étant cohérent d'aprés un théorème de Serre ([Hart] p.228 Th.5.2) $\exists d_0, \forall d \geq d_0$ $H^1(\mathfrak{X}, \mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}(d)) = 0$. Et donc $\forall d \geq d_0$ l'inclusion est une égalité.

Donc dans le cas où $\mathfrak{L}$ est le fibré très ample associé à $\mathfrak{X}$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(1)$, on obtient les relations suivantes entre les deux cônes : $\boxed{\forall d \geq 0 \ S_d \subset S'_d}$ et $\boxed{\forall d \geq d_0 \ S_d = S'_d}$. En particulier $X = \mathcal{P}\mathrm{roj}(S) = \mathcal{P}\mathrm{roj}(S')$. Cependant ([Hart] p.228) $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{L}^{\otimes d})$ est toujours un k-ev de dimension finie. Donc S' est un S module de type fini. Et donc le morphisme entre les deux cônes $\nu : \mathcal{S}\mathrm{pec}(S') \to \mathcal{S}\mathrm{pec}(S)$ induit par $S \hookrightarrow S'$ est un morphisme fini dont on verra plus tard que c'est un isomorphisme sur les cônes privés des sommets.

1.3. Le cas des schémas normaux. Le schéma $\mathfrak{X}$ sera dit normal si $\forall P \in \mathfrak{X}$ $\mathcal{O}_{P,\mathfrak{X}}$ est intégre intégralement clos, et projectivement normal si $\mathcal{C}$ est normal. On a alors le

Lemme 1. *Projectivement normal $\Rightarrow$ normal.*

En effet si $\forall P \in \mathcal{S}\mathrm{pec}(S)$ $\mathcal{O}_{P,\mathcal{C}} = S_P$ est intégre intégralement clos alors $\forall P \in \mathcal{P}\mathrm{roj}(S)$ soit T la partie multiplicative forme des homogènes de $S \setminus P$. $T^{-1}S$ est alors intégre intégralement clos et est gradué par $\mathbb{Z}$. Donc le sous anneau de ses éléments de degré 0 est intégralement clos (car $Frac(B_0) \cap B = B_0$ pour B gradué par $\mathbb{Z}$). Soit $\forall P \in \mathcal{P}\mathrm{roj}(S)$ $\mathcal{O}_{P,\mathfrak{X}} = S_{(P)}$ est intégre intégralement clos. Donc $\mathfrak{X}$ est normal.

On obtient une caractérisation de projectivement normal grace au :

Théorème 1. *Si $\mathfrak{X}$ est connexe,normal alors $\mathfrak{X}$ est intégre, S est intégre et S' est la cloture intégrale de S. Et donc $\nu : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ est la normalisation de $\mathcal{C}$.*

- $\mathfrak{X}$ étant normal $\mathfrak{X}$ est réduit. Pour montrer que $\mathfrak{X}$ est intégre il suffit donc de montrer que $\mathfrak{X}$ est irréductible. Supposons par l'absurde le contraire. Alors $\mathfrak{X}$ étant Noethérien $\mathfrak{X}$ sécrit $F_1 \cup \cdots \cup F_r$ où les F_i sont les composantes irréductibles de $\mathfrak{X}$. Mais $\mathfrak{X}$ étant connexe $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ par exemple. L'idée consiste à prendre deux germes de fonction non nulles au voisinage d'un point de l'intersection et à supports inclus dans F_1 reps. F_2 et de faire leur produit qui sera nul dans l'anneau local $\mathcal{O}$ de ce point. Soit alors $\mathcal{S}\mathrm{pec}(B)$ un voisinage affine d'un point de $F_1 \cap F_2$. $\forall i$ $F_i \cap \mathcal{S}\mathrm{pec}(B)$ est irréductible ou vide. Et de plus $F_i \not\subset \cup_{j \neq i} F_j \Rightarrow$ la même chose pour les $F_i \cap \mathcal{S}\mathrm{pec}(B)$ lorsque l'intersection n'est pas vide par densité de $F_i \cap \mathcal{S}\mathrm{pec}(B)$ dans F_i car F_i est irréductible . Donc on se raméne à $P_1, \ldots, P_{r'} \in \mathcal{S}\mathrm{pec}(B)$, $\exists Q \in \mathcal{S}\mathrm{pec}(B)$ $P_1 + P_2 \subset Q$, $\cap_i P_i = \sqrt{(0)} = (0)$ (car $\mathfrak{X}$ réduit $\Rightarrow \mathcal{S}\mathrm{pec}(B)$ réduit $\Rightarrow B$ réduit) et $\cap_{j \neq i} P_j \not\subset P_i$. Alors si $x \in \cap_{i \neq 1} P_i \setminus P_1$ et $y \in \cap_{i \neq 2} P_i \setminus P_2$, $xy = 0$ car $xy \in \cap P_i$ et $x_Q \neq 0$ car $x \notin P_1$ et $P_1 \subset Q$ (si $t \notin Q, tx = 0 \Rightarrow tx \in P_1 \Rightarrow x \in P_1$ ou $t \in P_1$) , de même $y_Q \neq 0$. Donc $\mathcal{O}_Q$ n'est pas intégre. Contradiction. Donc **$\mathfrak{X}$ est intégre.**

De plus $\mathfrak{X} = \mathcal{P}\mathrm{roj}(S)$ où $S = k[X_0, \ldots, X_n]/I$ et I est saturé. Donc si $x \in S$ est homogène ,$x^n = 0$ alors $\forall i, X_i \notin I$ $x = 0 \in S_{X_i}$ car $S_{(X_i)} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(D_+(X_i))$ est intégre et $\left(\frac{x}{X_i^{deg(x)}}\right)^n = 0 \in S_{(X_i)}$. Donc $\exists n_i, X_i^{n_i} x = 0 \in S$ or I étant saturé $\Rightarrow x = 0$. Donc S est réduit. On en déduit facilement que **S est intégre** car $xy = 0$, x et y homogènes de degré> 0 $\Rightarrow D_+(xy) = D_+(x) \cap D_+(y) = \emptyset$. Or $\mathfrak{X}$ est irréductible et $D_+(x) = \emptyset \Leftrightarrow S_{(x)} = 0 \Leftrightarrow x$ nilpotent $\Leftrightarrow x = 0$ car S est réduit.

- Soit donc le faisceau d'anneau $\boldsymbol{\mathfrak{S} = \oplus_{d \geq 0} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(d)}$. $S' = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{S})$. $\forall U, \mathfrak{S}(U)$ est un sous anneau du coprs des fractions de S. En effet, U est recouvert par un nombre fini

de $D_+(f_i)$ où les f_i sont homogènes de degré >0. Donc se donner une section sur U de $\mathfrak{S}$ est équivalent à se donner des sections sur les $D_+(f_i)$ coincidant sur les intersections. Cependant $\forall i, \mathfrak{S}(D_+(f_i)) = \oplus_{d\geq 0}S(d)_{(f_i)}$ ={degré ≥ 0 de S_{f_i}}. Or S étant intégre $S \hookrightarrow S_{f_i} \hookrightarrow \mathrm{Frac}(S)$ et $S_{f_i} \cap S_{f_j} = S_{f_i f_j}$. On voit donc facilement que $\mathfrak{S}(U) = \cap_i\{$ degré ≥ 0 de $S_{f_i}\} \subset \mathrm{Frac}(S)$.
On en déduit que **$\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ est intégralement clos**. En effet $\mathfrak{X}$ étant normal pour tout ouvert affine U, $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ est Normal. Donc si $U = D_+(f_i)$ avec $deg(f_i) = 1$, $S_{(f_i)}$ est intégralement clos. Mais alors S étant intégre { degré ≥ 0 de S_{f_i} } $\cong S_{(f_i)}[T]$ et est donc intégralement clos (On verra plus loin l'interprétation géométrique de ce cylindre) . Or $\mathfrak{X}$ est recouvert par un nombre fini de $D_+(f_i)$ avec f_i de degré 1 (cf. X_i) ce qui implique que $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ s'écrit comme intersection d'anneaux intégralement clos tous sous anneaux de $\mathrm{Frac}(S)$. Donc $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ est intégralement clos.

- De plus S' est un S module de type fini $\Rightarrow$ ***S'* est entier sur *S***. Donc S' est la cloture intégrale de S.

Corollaire 1. *Soit $\mathfrak{X}$ un schéma projectif. Alors $\mathfrak{X}$ est projectivement normal ssi il est normal et $\forall d \geq 0$ l'application $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \to \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(d))$ est surjective. Si c'est le cas alors $\mathcal{C}'$ est la normalisation de $\mathcal{C}$.*

Pour un schéma connexe le résultat découle de ce qui précède. Si $\mathfrak{X}$ n'est pas connexe ses composantes connexes $\mathfrak{X}_i$ sont des fermés et sont en nombre fini car $\mathfrak{X}$ est Noetherien. Elles sont donc ouvertes $\Rightarrow$ elles sont normales pour la structcure de sous schéma ouvert qui coincide avec celle de sous schéma fermé via l'inclusion dans $\mathbb{P}^n$. On déduit donc le résultat du cas précédent.

Cependant on remarque que pour $n \geq 2, H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = 0$. Et donc en considérant la suite exacte (1) on obtient le

Corollaire 2. *Si $n \geq 2, \mathfrak{X}$ est projectivement normal ssi $\mathfrak{X}$ est normal et*
$\boxed{\forall d \geq 0 \quad H^1(\mathbb{P}^n, \mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}(d)) = 0}$

1.4. Le cas de la quartique de $\mathbb{P}^3$. Remarquons d'abord que pour $n \geq 2$ le cône sur une hypersurface normale de $\mathbb{P}^n$ est normal. En effet si f est homogène de degré $\delta > 0$, $\mathfrak{X} = V(f)$ alors la multiplication par f induit un isomorphisme de $k[X_0, \ldots, X_n]$-modules gradués: $k[X_0, \ldots, X_n](-\delta) \cong I$. Et donc $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\delta) \cong \mathfrak{I}_{\mathfrak{X}} \Rightarrow \boxed{\forall d \in \mathbb{Z} \quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\delta + d) \cong \mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}(d)}$.
Donc $H^1(\mathbb{P}^n, \mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}(d)) = H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\delta + d)) = 0$ ([Hart] III,5.1.a) ce qui implique par le critère précédent que $\mathfrak{X}$ est projectivement normal.

Si l'on veut donc donner un exemple de variété projective normale non projectivement normale irréductible (ce qui exclu le cas de $\mathbb{P}^1$) on ne peut choisir une hypersurface de $\mathbb{P}^2$ ni une hypersurface de $\mathbb{P}^3$. Le premier choix possible est donc une courbe de $\mathbb{P}^3$, et effectivement on peut trouver une courbe de $\mathbb{P}^3$ normale non projectivement normale.

Ainsi la quartique de $Y \subset \mathbb{P}^3$ de paramétrisation $[t^4, t^3u, tu^3, u^4]$ fournit alors un exemple intéressant d'illustration des théorèmes précédents et de ceux à venir. Après quelques calculs qui sont dans la section 6 on obtient les résultats suivants :

- $Y \cong \mathbb{P}^1$

- Y est normale mais n'est pas projectivement normale
- $\forall d \neq 1, H^1(\mathbb{P}^3, \mathfrak{I}_{\mathbb{P}^3}(d)) = 0$ et $\dim_k(H^1(\mathbb{P}^3, \mathfrak{I}_{\mathbb{P}^3}(1))) = 1$

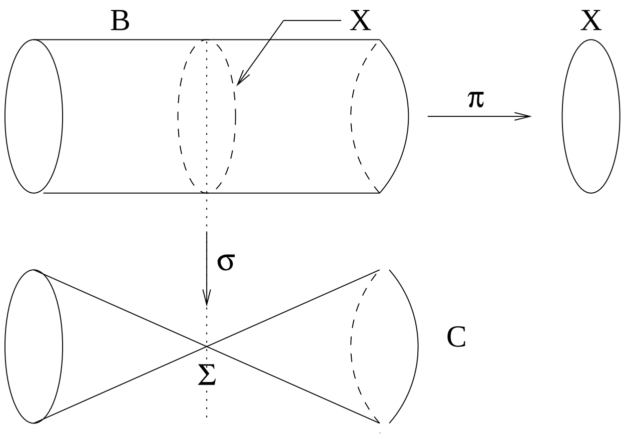
2. Le cylindre au dessus du cône

Si M est un A-module notons $\mathcal{S}^*M$ l'algèbre symétrique sur M. Plus généralement si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module notons $\mathcal{S}^*\mathcal{F}$ l'algébre symétrique sur $\mathcal{F}$ qui est le faisceau associé au préfaisceau $U \to \mathcal{S}^*\mathcal{F}(U)$ ([Hart] Ex.5.16 p127).

Alors $\mathcal{S}^*\mathcal{F}$ est une $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre graduée : $\mathcal{S}^*\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \oplus \left(\bigoplus_{d>0} \mathcal{S}^d\mathcal{F} \right)$.

On sait de plus que si M est libre de rang n alors $\mathcal{S}^*M \cong A[X_1, \ldots, X_n]$.

Donc si $\mathcal{F}$ est localement libre de rang 1, $\mathcal{S}^*\mathfrak{L}^{\vee}$ est localement un cylindre sur $\mathfrak{X}$ (On choisit $\mathfrak{L}^{\vee}$ au lieu de $\mathfrak{L}$ car dans $\mathcal{S}^*M \cong A[x_1, \ldots, x_n]$ on préfére voir les x_i comme les fonctions coordonnées et donc voir $\mathcal{S}^*(M^*) \cong A[x_1^*, \ldots, x_n^*]$ comme l'algèbre symétrique des fonctions polynomiales sur M).



Notons alors $\boxed{\mathcal{B} = \mathcal{S}\mathrm{pec}(\mathcal{S}^*\mathfrak{L}^{\vee})}$ le schéma obtenu par recollement sur des ouverts affines U de $\mathfrak{X}$ des $\mathcal{S}\mathrm{pec}(\mathcal{S}^*\mathfrak{L}^{\vee}(U))$. $\mathcal{B}$ est en quelque sorte le cylindre sur $\mathfrak{L}$. On a alors une application naturelle $\pi : \mathcal{B} \to \mathfrak{X}$ projection du cylindre sur sa base qui se déduit de l'inclusion $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathcal{S}^*\mathfrak{L}^{\vee}$.

Ainsi localement sur un ouvert affine $U \cong \mathcal{S}\mathrm{pec}(A)$ sur lequel $\mathfrak{L}$ est libre $\pi^{-1}(U) \cong \mathcal{S}\mathrm{pec}(A[T])$ et

$\pi_{|\pi^{-1}(U)} : \mathcal{S}\mathrm{pec}(A[T]) \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{pec}(A)$ est induit par l'inclusion $A \hookrightarrow A[T]$.

Soit alors $\mathcal{C}$ le cône sur $\mathfrak{X}$ ou bien sur un fibré inversible ample $\mathfrak{L}$. Dans le cas du cône sur $\mathfrak{L}$ on supposera toujours (et ce ne sera plus précisé) $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = k$ afin que l'idéal $\sum_{d>0} \Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{L}^{\otimes d}) = S'_+$ définisse un point fermé du cône qui n'est autre autre que le sommet noté Σ. k étant algébriquement clos ce sera le cas si par exemple $\mathfrak{X}$ est intégre ou plus généralement réduit et connexe. Dans le cas du cône sur $\mathfrak{X}$, $S_+ = \sum_{d>0} \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))/\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}(d))$ est toujours un point fermé et sera encore noté Σ. Dans le cas du cône sur $\mathfrak{X}$ on choisira $\boxed{\mathcal{B} = \mathcal{S}\mathrm{pec}(\mathcal{S}^*\mathcal{O}_X(1)^{\vee})}$ comme cylindre au dessus de $\mathcal{C}$. Dans le cas du cône sur $\mathfrak{L}$, on choisira $\boxed{\mathcal{B} = \mathcal{S}\mathrm{pec}(\mathcal{S}^*\mathfrak{L}^{\vee})}$.

On démontre alors que dans tous les cas il existe un morphisme propre $\sigma : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ tel que $\boxed{\sigma^{-1}(\Sigma) \cong \mathfrak{X}}$, et tel que $\boxed{\sigma : \mathcal{B} \setminus \sigma^{-1}(\Sigma) \cong \mathcal{C} \setminus \{\Sigma\}}$. Pour cela on se refère à [EGA] II.8.3. (L'hypothèse $\mathfrak{L}$ ample est notemment utilisée ici ainsi que la nessécité de choisir $\mathfrak{L}^{\curlyvee}$ au lieu de $\mathfrak{L}$). σ consiste alors en l'éclatement du sommet Σ.

On notera alors $i : \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathcal{B}$ l'inclusion de la fibre $\sigma^{-1}(\Sigma)$ dans $\mathcal{B}$. i n'est autre que le morphisme induit par la projection $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \oplus (\oplus_{d>0} \mathcal{S}^d(\mathfrak{L})) \to \mathcal{O}_X$ qui localement sur $U = \mathcal{S}\mathrm{pec}(A)$ est l'application $i_{|U} : U = \mathcal{S}\mathrm{pec}(A) \to \pi^{-1}(U) = \mathcal{S}\mathrm{pec}(A[T])$ induite par l'évaluation en 0 de $A[T] \to A$.
On remarque que i n'est pas forcément un morphisme plat mais que cependant $\forall i > 1$ $\mathrm{Tor}_i^{A[T]}(A, M) = 0$ car on a la résolution projective de A comme $A[T]$-module suivante $0 \to A[T] \overset{\times T}{\to} A[T] \overset{T=0}{\to} A \to 0$.
Et donc $i^* : K_0'(\mathcal{B}) \to K_0'(\mathfrak{X})$ est bien défini (cf. annexe) par $[\mathcal{F}] \to [i^*\mathcal{F}] - [Tor_1^{i^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{B}}}(i^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})]$.
Mais de plus i^* est un isomorphisme : cette propriété est appelée la propriété d' invariance d'homotopie (cf. par exemple [Rose] p.141 pour le cas affine i.e. $G_0(A) \cong G_0(A[T])$). Or π est plat ($A[T]$ est un A-module libre donc plat) et $\pi \circ i = Id_{\mathfrak{X}}$. Donc π^* est défini et est l'isomorphisme inverse de i^*.

On remarque en particulier que si $\mathcal{C}$ est le cône sur $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{C}'$ sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(1)$ (avec $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = k$) alors $\boxed{\mathcal{C} \setminus \{\Sigma\} \cong \mathcal{C}' \setminus \{\Sigma\}}$.

Pour un cône $\mathcal{C}$ sur $\mathfrak{X}$ ou $\mathfrak{L}$ on remarque également que si $\mathfrak{X}$ est normal alors $\mathcal{B}$ est normal (car il s'agit d'une propriété locale, et A normal $\Rightarrow$ $A[T]$ normal), et que donc $\mathcal{C} \setminus \{\Sigma\} \cong \mathcal{B} \setminus \mathfrak{X}$ est normal : le cône est normal en dehors de son sommet.

De même pour la lissité : il s'agit d'une propriété locale, or A régulier $\Rightarrow$ $A[T]$ régulier ([Rose] 3.2.3 p134). Et donc $\mathfrak{X}$ nonsingulier $\Rightarrow$ $\mathcal{C} \setminus \{\Sigma\}$ nonsingulier. Cependant il est facile de voir qu'un cône sur $\mathfrak{X}$ qui n'est par une variété affine de $\mathbb{A}^{n+1}$ posséde toujours son sommet comme singularité : c'est cette singularité qui va faire toute la différence entre $K_0(\mathcal{C})$ et $K_0'(\mathcal{C})$.

3. Le K_0 d'un cône

3.1. L'indépendance des faisceaux cohérents vis à vis du sommet.

Théorème 2. *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma projectif et si $\mathcal{C}$ est le cône affine sur $\mathfrak{X}$ ou bien le cône sur un fibré inversible ample $\mathfrak{L}$ alors* $\boxed{K_0'(\mathcal{C}) \cong K_0'(\mathcal{C} \setminus \{\Sigma\})}$

Pour le prouver considérons la suite exacte d'excision de Grothendieck ([Hart] ex 6.10 p148) :

$$\boldsymbol{K_0'(\Sigma) \to K_0'(\mathcal{C}) \to K_0'(\mathcal{C} \setminus \{\Sigma\}) \to 0}$$

dans laquelle la premiére application est q_* ,où $q : \Sigma \hookrightarrow \mathcal{C}$, qui au fibré trivial k^r associe le faisceau gratte-ciel sur $\mathcal{C}$ concentré en Σ de rang r. Il faut donc montrer que cette application est nulle.
Pour cela on remarque que si P est un point fermé de $\mathcal{S}\mathrm{pec}(k[T]) = \mathbb{A}^1$ alors $K_0'(P) \to K_0'(\mathbb{A}^1)$ est nulle. En effet si $q : P \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ alors le fibré trivial de rang 1 sur P engendrant

$K_0'(P)$ il suffit de montrer que son image est nulle. Or cette image est $q_*\mathcal{O}_P$. Mais on a la suite exacte $0 \to \mathfrak{I}_P \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \to q_*\mathcal{O}_P \to 0 \Rightarrow [q_*\mathcal{O}_P] = [\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}] - [\mathfrak{I}_P] = [\widetilde{k[T]}] - [\tilde{I}] = 1 - 1 = 0$ car k[T] étant principal I est libre de rang 1.
Or dans le cas du cône sur $\mathfrak{X}, \mathcal{C}$, il suffit de remarquer que $\mathcal{C}$ contient toujours une droite $\mathcal{D} \cong \mathcal{S}\mathrm{pec}(k[T])$ comme sous schéma fermé passant par son sommet et que donc on peut factoriser q_* :

$$\begin{tikzcd} K_0'(\Sigma) \arrow[rr] \arrow[dr] & & K_0'(\mathcal{C}) \\ & K_0'(\mathcal{D}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

d'où la nullité. (Pour montrer l'existence de la droite comme sous schéma fermé j'utilise k alg.clos pour voir qu'il existe un point k-rationnel en dehors du sommet, puis je trace la droite le joignant au sommet)

Dans le cas d'un cône sur $\mathfrak{L}, \mathcal{C}' = \mathcal{S}\mathrm{pec}(S')$, on ne peut pas forcément faire passer une droite par le sommet, cependant si S' est engendrée comme k-algébre par $b_0, \ldots, b_m$ homogènes de degrés $d_0, \ldots, d_m$ alors $S' \cong k[X_0, \ldots, X_m]/I$ où $k[X_0, \ldots, X_m]$ est muni de la graduation pour laquelle X_i est de degré d_i et où I est homogène pour cette graduation (i.e. $\sum X_0^{\alpha_0} \ldots X_m^{\alpha_m}$ est homogène si $\sum \alpha_i d_i = cst$). On peut donc faire passer une courbe monomiale $\mathcal{D} = \mathcal{S}\mathrm{pec}(k[a_0 T^{d_0}, \ldots, a_m T^{d_m}])$ par le sommet où $(a_0, \ldots, a_m) \in \mathcal{C}' \setminus \Sigma$. (cf.même remarque que précédemment). Mais $\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{S}\mathrm{pec}(k[T]) \xrightarrow{p} \mathcal{D}$ est la normalisation de $\mathcal{D}$. Et p étant un morphisme fini (au moins un des a_i est $\neq 0$, ou bien directement par normalisation de Noether) p_* est défini (cf. Annexe). On a alors une factorisation

$$\begin{tikzcd} K_0'(\Sigma) \arrow[r] \arrow[d] & K_0'(\mathcal{C}) \\ K_0'(\mathbb{A}^1) \arrow[r, "p_*"] & K_0'(\mathcal{D}) \arrow[u, "(\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C})_*"'] \end{tikzcd}$$

d'où la nullité.

Corollaire 3. *Si* $\Gamma(X, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = k$, *si* $\mathcal{C}$ *est le cone sur* $\mathfrak{X}$ *et* $\mathcal{C}'$ *sur* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(1)$ *alors* $\boxed{K_0'(\mathcal{C}) \cong K_0'(\mathcal{C}')}$.

3.2. Le théorème de factorisation.

Théorème 3. *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma projectif et si $\mathcal{C}$ est le cône affine sur $\mathfrak{X}$ ou bien le cône sur un fibré inversible ample $\mathfrak{L}$, alors l'application $\alpha : K_0(C) \to K_0'(C)$ se factorise par le rang de la fibre au sommet du cône $K_0(C) \to K_0(\Sigma) = \mathbb{Z}$.*

En effet on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} K_0(\mathcal{C}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] \arrow[dr, "\beta"] & K_0'(\mathcal{C}) \arrow[d, "\cong"] \\ K_0(\mathcal{C} \setminus \{\Sigma\}) \arrow[r] & K_0'(\mathcal{C} \setminus \{\Sigma\}) \end{tikzcd}$$

Où si $j : \mathcal{C} \setminus \{\Sigma\} \hookrightarrow \mathcal{C}$ les deux applications verticales sont données par j^*, la restriction des faisceau à l'ouvert $\mathcal{C} \setminus \{\Sigma\}$. Cependant on a prouvé que $\boxed{K_0'(\mathcal{C}) \cong K_0'(\mathcal{C} \setminus \{\Sigma\})}$, et cela montre donc que $\boldsymbol{\alpha}$ **se factorise par le rang ssi** $\boldsymbol{\beta}$ **se factorise.**

Considérons maintenant le diagramme commutatif (dans lequel la partie du haut définit γ) :

$$\begin{tikzcd} & K_0(\mathcal{B}) \arrow[dr] & \\ K_0(\mathcal{C}) \arrow[ur, "\sigma^*"] \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[d, "\beta"'] & & K_0'(\mathcal{B}) \arrow[d] \\ K_0'(\mathcal{C}\setminus\Sigma) \arrow[rr, "\sigma_{|\mathcal{B}\setminus\mathfrak{X}}^* \cong"] & & K_0'(\mathcal{B}\setminus\mathfrak{X}) \end{tikzcd}$$

Donc **si γ se factorise par le rang alors β ègalement.**

Considérons finalement :

$$\begin{tikzcd} K_0(\mathcal{C}) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & K_0'(\mathcal{B}) \arrow[d, "i^* \cong"] \\ \mathbb{Z} = K_0(\Sigma) \arrow[r] & K_0'(\mathfrak{X}) \end{tikzcd}$$

Où l'isomorphisme i^* provient de la propriété d'invariance d'homotopie. On y constate que
$K_0(\mathcal{C}) \to K_0(\Sigma)$ est l'application rang de la fibre au sommet du cône.
Donc γ se factorise par le rang, donc α aussi.
Rem. : On peut montrer plus généralement que $\forall i \geq 0, K_i(\mathcal{C}) \to K_i'(\mathcal{C})$ se factorise par le rang.

3.3. La relation entre le K_0' du cône et le K_0' du schéma.

Théorème 4. *Si $\mathcal{C}$ désigne un cône sur $\mathfrak{L}$ alors* $\boxed{K_0'(\mathcal{C}) \cong K_0'(\mathfrak{X})/((1-[\mathfrak{L}]).K_0'(\mathfrak{X}))}$ *où $1 = [\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}]$ et où $(1-[\mathfrak{L}]) \in K_0(\mathfrak{X})$ opére sur $K_0'(\mathfrak{X})$ via la structure de $K_0'(\mathfrak{X})$ comme $K_0(\mathfrak{X})$-module (cf.annexe).*

On sait par le théorème 2 que $K_0'(\mathcal{C}) \cong K_0'(\mathcal{C}\setminus\{\Sigma\}) \cong K_0'(\mathcal{B}\setminus\mathfrak{X})$. Calculons alors $K_0'(\mathcal{B}\setminus\mathfrak{X})$ grace à la suite exacte de Grothendieck :

$$\boldsymbol{K_0'(\mathfrak{X}) \xrightarrow{i_*} K_0'(\mathcal{B}) \longrightarrow K_0'(\mathcal{B}\setminus\mathfrak{X}) \longrightarrow 0} \tag{2}$$

On sait par invariance d'homotopie que $\boxed{\pi^* : K_0'(\mathfrak{X}) \cong K_0'(\mathcal{B})}$.

Pour calculer $\mathrm{Im}(i_*)$ soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathfrak{X}$. Notons $\mathfrak{I}_{\mathfrak{X}} = \ker i^{\#}$ le faisceau d'idéaux cohérent de $\mathcal{B}$ (il s'agit du faisceau d'idéaux associé au sous schéma fermé $\mathfrak{X}$ de $\mathcal{B}$). On a alors une suite exacte de faisceaux cohérents sur $\mathcal{B}$:

$$\boldsymbol{0 \longrightarrow \pi^*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \mathfrak{I}_{\mathfrak{X}} \longrightarrow \pi^*(\mathcal{F}) \longrightarrow i_*(\mathcal{F}) \longrightarrow 0} \tag{3}$$

où la première application est induite par l'application de préfaisceaux de $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$-modules $(\pi^*(\mathcal{F}) \otimes \mathfrak{I}_{\mathfrak{X}})_{pref} \longrightarrow \pi^*(\mathcal{F})$ qui à $x \otimes a$ associe $a.x$ (il s'agit de la généralisation au faisceaux de l'application $M \otimes_A I \to M \ \ , m \otimes x \to x.m$) et qui induit un morphisme en faisceau associé.
Quant à la seconde application elle provient de la propriété de foncteurs adjoints pour un morphisme de schéma $f : X \to Y$: $\mathrm{Hom}_{O_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{O_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$. En effet on

l'applique ainsi :
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathcal{B}}(\pi^*(\mathcal{F}), i_*(\mathcal{F})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathfrak{X}}(\mathcal{F}, \pi_* i_*(\mathcal{F}))$, mais $\pi i = Id_\mathfrak{X}$ donc $\cong \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ dans lequel on choisit l'identité.
Pour montrer l'exactitude de (3) il faut et il suffit de la montrer localement. Ainsi on la montre sur des ouverts de $\mathcal{B}$ qui sont des cylindres au dessus d'ouverts affines de $\mathfrak{X}$ sur lesquels $\mathfrak{L}$ est libre : ils sont du type $\pi^{-1}(U)$ où $U \cong \mathcal{S}\mathrm{pec}(A)$. Alors $\pi^{-1}(U) \cong \mathcal{S}\mathrm{pec}(A[T])$, $\mathcal{F}_{|U} \cong \widetilde{M}$ où M est un A-module de type fini. Et on a donc ([Hart] II-5-2 par exemple) $\boxed{{\pi_{|\pi^{-1}(U)}}^*(\mathcal{F}) \cong M \widetilde{\otimes_A A[T]}}$, $\boxed{\mathfrak{I}_{X\,|\pi^{-1}(U)} \cong \widetilde{TA[T]}}$ et $\boxed{(i_{|U})_*(\mathcal{F}) \cong \widetilde{{}_{A[T]}M}}$ (i.e. M muni de la structure de $A[T]$-module via l'évaluation en 0).
Donc $\pi^*(\mathcal{F}) \otimes \mathfrak{I}_\mathfrak{X} \cong (M \widetilde{\otimes_A A[T]}) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{B}} (\widetilde{TA[T]}) \cong ((M \otimes_A A[T]) \widetilde{\otimes_{A[T]}} (TA[T]))$.

Et donc par exactitude de ~ et de Γ en affine il faut et il suffit de montrer l'exactitude de la suite de A[T]-modules :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & (M \otimes_A A[T]) \otimes_{A[T]} (TA[T]) & \longrightarrow & M \otimes_A A[T] & \longrightarrow & {}_{A[T]}M & \longrightarrow 0 \\
& (m \otimes P) \otimes Q & \longrightarrow & m \otimes (PQ) & & & \\
& & & m \otimes R & \longrightarrow & R(0).m &
\end{array}$$

ce qui ne pose pas de problème.

On remarque de plus que $\mathfrak{I}_X \cong \pi^*(\mathfrak{L})$.

On en déduit donc de (3) que dans $K_0'(\mathcal{B})$,
$\boxed{[i_*(\mathcal{F})] = [\pi^*(\mathcal{F})] - [\pi^*(\mathfrak{L}) \otimes \pi^*(\mathcal{F})]}$.

Cependant par invariance d'homotopie π^* permet d'identifier $K_0'(\mathcal{B})$ et $K_0'(\mathfrak{X})$. Et donc dans cette identification l'application i_* devient l'application $[\mathcal{F}] \longrightarrow [\mathcal{F}] - [\mathfrak{L} \otimes \mathcal{F}] = (1 - [\mathfrak{L}]).[\mathcal{F}]$ où $1 = [\mathcal{O}_\mathfrak{X}]$.

D'où le résultat grace à (2).

Corollaire 4. *Si $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_\mathfrak{X}) = k$ alors $K_0'(\mathcal{C}) \cong K_0'(\mathfrak{X})/(1 - [\mathcal{O}_\mathfrak{X}(1)]).K_0'(\mathfrak{X})$ où $\mathcal{C}$ est le cône sur $\mathfrak{X}$.*

Ceci résulte en effet du corollaire 3.
Dans le cas de la quartique de $\mathbb{P}^3$ on a $K_0'(\mathfrak{X}) = K_0'(\mathbb{P}^1) = K_0(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathcal{P}\mathrm{ic}(\mathbb{P}^1)$ via rang$\oplus$det (cf.[Hart] ex.6.11 p.149). Mais $\mathcal{P}\mathrm{ic}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}$ via $n \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$. Et donc si $\varphi : \mathbb{P}^1$ $!cong\mathfrak{X}$ notons $\delta \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi^* \mathcal{O}_\mathfrak{X}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\delta)$. On en déduit que $K_0'(\mathcal{C}) \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/(0 \oplus \delta\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z}$. (Il semble de plus que $\delta = 4$ par un calcul de diviseurs).

4. Le théorème fondamentale de lissité

4.1. La partie de géométrie algébrique.

Théorème 5. *Soit $\mathfrak{X}$ un schéma nonsingulier. Alors tout faisceau cohérent sur $\mathfrak{X}$ admet une résolution* finie *par des faisceaux localement libres*

Dans le cas affine, $\mathfrak{X} = \mathcal{S}\mathrm{pec}(A)$, le théorème est équivalente à : tout A-module de type fini admet une résolution projective finie. Or on sait que c'est le cas pour A régulier d'où le résultat en affine.

4.2. La partie de K-théorie. Pour la formulation générale du théorème de résolution dans une catégorie avec suite exacte cf.[Rose] 3.1.13. J'en donne ici la preuve avec le langage des faisceaux cohérents - localement libres mais la preuve est la même dans le cas général.

Théorème 6. *Si i désigne l'inclusion de la catégorie des faisceaux localement libres dans la catégorie des faisceaux cohérents sur $\mathfrak{X}$ alors $i_* : K_0(\mathfrak{X}) \to K_0'(\mathfrak{X})$ induit un isomorphisme d'inverse l'application bien définie Caractéristique d'Euler-Poincaré χ qui à $[\mathcal{F}] \in K_0'(\mathfrak{X})$ associe $\sum_i (-1)^i [\mathcal{P}_i]$ où $0 \to \mathcal{P}_n \to \cdots \to \mathcal{P}_0 \to \mathcal{F} \to 0$ est une résolution finie de $\mathcal{F}$ par des $\mathcal{P}_i$ localement libre.*

La démonstration étant longue (mais intéressante) je l'ai mise en annexe.

4.3. L'application au cas des cônes. On sait déja que $K_0(\mathcal{C}) \to K_0'(\mathcal{C}) \cong K_0'(\mathcal{C} \setminus \Sigma)$ se factorise par le rang.

Mais si $\mathfrak{X}$ est lisse alors $\mathcal{C} \setminus \Sigma$ est lisse et donc $K_0(\mathcal{C}) \cong K_0'(\mathcal{C} \setminus \Sigma)$ ce qui prouve que $\boldsymbol{K_0(\mathcal{C}) \longrightarrow K_0(\mathcal{C} \setminus \Sigma)}$ **se factorise par le rang.**

On en déduit donc que la partie non triviale du K_0 du cone va avoir lieu au niveau du sommet. C'est cette singularité qui fait que sur un cône on peut avoir $K_0 \neq K_0'$. Si les cohérents l'ignorent (th.2), les fibrés eux vont faire qu'au niveau du sommet $K_0 \neq K_0'$.

5. Le calcul du groupe de Picard d'un cône normal et la caractérisation des schémas projectivement normaux grace au groupe de Picard

5.1. La trivialité du groupe de Picard d'un cone Normal.

Théorème 7. *Si $\mathcal{C}$ est normal alors* $\boxed{\mathcal{P}ic(\mathcal{C}) = 0}$.

Les composantes connexes de $\mathcal{C}$ sont des sous schémas ouverts intégres (cf.th.1) et ont peut donc se ramener au cas de $\mathcal{C}$ intégre.

On sait qu'alors on a une application injective $\mathcal{P}\mathrm{ic}(\mathcal{C}) \longrightarrow CH^1(\mathcal{C})$.

On peut alors montrer ([Bass] p.501) qu'il existe une application cl telle qu'on ait un diagramme commutatif (cf.annexe pour det) :

$$\begin{array}{ccc} K_0(\mathcal{C}) & \longrightarrow & K_0'(\mathcal{C}) \\ {\scriptstyle det}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle cl} \\ \mathcal{P}\mathrm{ic}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & CH^1(\mathcal{C}) \end{array}$$

On obtient alors le résultat en utilisant le th.3,i.e. l'application du haut se factorise par le rang, car tout élément de $\mathcal{P}$ic est de rang 1 et l'application du bas est injective.

cf. annexe pour une autre démonstration dans un cadre plus général.

5.2. Préliminaire : suite de Mayer-Vietoris. L'idée de la suite de Mayer Vietoris en K-théorie algébrique est la suivante : supposons nous donné un produit fibré d'anneaux $A = B_1 \times_C B_2$ avec $B_1 \overset{\varphi_1}{\to} C$ et $B_2 \overset{\varphi_2}{\to} C$ tel que φ_1 soit surjectif.

Si on considére alors la suite exacte : $0 \longrightarrow A^* \longrightarrow B_1^* \times B_2^* \longrightarrow C^*$
$(x_1, x_2) \longrightarrow (x_1, x_2) \longrightarrow \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)^{-1}$

Celle ci n'est pas forcément exacte à droite. On a donc envie d'écrire une suite exacte longue associée. Or il se trouve que le groupe des unités d'un anneau est lié à son groupe de Picard (Par exemple en géométrie algébrique sur un schéma X, $H^1(X,\mathcal{O}_X^*)=\mathrm{Pic}(X)$). Et qu'on peut alors démontrer ([Eise]) que l'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow A^* \longrightarrow B_1^* \times B_2^* \longrightarrow C^* \longrightarrow \mathrm{Pic}(A) \longrightarrow \mathrm{Pic}(B_1) \oplus \mathrm{Pic}(B_2) \longrightarrow \dots$$

appelée suite de Mayer-Vietoris.

5.3.

Théorème 8. *Si $\mathfrak{X}$ est normal et si $\mathcal{C} = \mathcal{S}pec(S)$ est le cône sur $\mathfrak{X}$ alors* $\boxed{\mathcal{P}ic(\mathcal{C}) \cong \dfrac{(\widetilde{S}/\mathfrak{c})^*}{((S/\mathfrak{c})^*.\widetilde{S}^*)}}$ *où $\widetilde{S}$ est la normalisation de S et $\mathfrak{c}$ est le conducteur de $\widetilde{S}$ dans S.*

En effet, si on choisit $B_1 = S/\mathfrak{c}, B_2 = \widetilde{S}$ et $C = \widetilde{S}/\mathfrak{c}$ on a alors une suite de Mayer Vietoris :

(4) $$0 \to S^* \to (S/\mathfrak{c})^* \oplus \widetilde{S}^* \to (\widetilde{S}/\mathfrak{c})^* \to \mathcal{P}\mathrm{ic}(S) \to \mathcal{P}\mathrm{ic}(S/\mathfrak{c}) \oplus \mathcal{P}\mathrm{ic}(\widetilde{S}) \to \dots$$

Mais d'après le th.7 $\widetilde{S}$ étant normal, $\widetilde{S} = \sum_{d\geq 0}\Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(d))$ (th.1) , $\boxed{\mathcal{P}\mathrm{ic}(\widetilde{S}) = 0}$.

De plus $\widetilde{S}$ étant un S-module de type fini $Supp(S/\mathfrak{c})$ ={des idéaux premiers de S tels que S_P ne soit pas normal }. En effet si P est un premier de S et $T = S\setminus P$ alors $S_P = T^{-1}S$ est normal $\Leftrightarrow T^{-1}S = \widetilde{T^{-1}S}$. Et $\widetilde{T^{-1}S} = T^{-1}\widetilde{S}$. Mais alors on a facilement

$$T^{-1}S = T^{-1}\widetilde{S} \iff \forall x \in \widetilde{S}\ \exists t \in T\ tx \in S \iff \exists t \in T\ t\widetilde{S} \subset S \iff \mathfrak{c} \cap T \neq \emptyset \iff \mathfrak{c} \subsetneq P$$

en utilisant $\widetilde{S}$ est un S-module de type fini pour la 2^{eme} èquivalence. ([Eise]p.67).

Mais $\mathfrak{X}$ étant normal le cône est normal en dehors de son sommet, donc $Supp(S/\mathfrak{c}) = \{S_+\} \Longrightarrow \boxed{\mathcal{P}\mathrm{ic}(S/\mathfrak{c}) = 0}$.

Grace à (4) on obtient alors $\boxed{\mathcal{P}\mathrm{ic}(S) \cong \dfrac{(\widetilde{S}/\mathfrak{c})^*}{Im((S/\mathfrak{c})^* \oplus \widetilde{S}^* \to (\widetilde{S}/\mathfrak{c})^*)}}$. Mais l'application du dénominateur est $(x,y) \to xy^{-1}$ donc son image est $(S/\mathfrak{c})^*.\widetilde{S}^*$ où $(S/\mathfrak{c})^* \hookrightarrow (\widetilde{S}/\mathfrak{c})^*$ et S^* désigne l'image de S^* dans $(\widetilde{S}/\mathfrak{c})^*$. D'où le résultat.

Corollaire 5. *Si $\mathfrak{X}$ est normal et connexe ($\Rightarrow \mathfrak{X}$ et $\mathcal{C}$ intégres) alors $\mathfrak{X}$ est projectivement normal ssi $\mathcal{P}ic(\mathcal{C}) = 0$.*

On sait déja que si $\mathfrak{X}$ est projectivement normal alors $\mathcal{P}\mathrm{ic}(\mathcal{C}) = 0$ par le th.7.

Réciproquement, $\mathfrak{X}$ étant connexe normal , $\widetilde{S}^* = \left(\sum_{d\geq 0}\Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(d))\right)^* = (\Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}))^* = \boxed{k^*}$.

Mais $\mathfrak{X}$ n'ètant pas projectivement normal $S/\mathfrak{c} \subsetneq \widetilde{S}/\mathfrak{c}$. Or on peut voir facilement que tous deux sont des k-algébres de dimension finie avec k algébriquement clos.

Mais si B est une k-algèbre de dimension finie avec k un corps infini alors $B = \mathrm{Vect}_k(B^*)$. En effet si B est muni de la topologie de Zariski de $\mathbb{A}^n$ où $n = \dim_k B$. Alors B^* est un ouvert de B car $x \in B$ inversible $\Leftrightarrow \mathrm{N}_{B|k}(x) \neq 0$. Or $x \to m_x$ de B dans

$End_{k-ev}(B)$ est continu et $u \to \det(u)$ également, donc $x \to \det(m_x)$ l'est où m_x est la multiplication par x

Mais k étant infini tout ouvert non vide de B est dense. Or $Vect_k(B^*)$ est un sous-ev, donc un fermé donc égal à B.
De tout cela on déduit que si $B_1 \subsetneq B_2$ sont deux k-algèbres de dim. finie avec k infini alors $B_1^* \subsetneq B_2^*$.

Donc $(S/\mathfrak{c})^* \subsetneq (\tilde{S}/\mathfrak{c})^*$ ce qui implique par le théoréme précédent $\mathcal{P}\mathrm{ic}(\mathcal{C}) \neq 0$.

5.4. Le cas de la quartique. Dans le cas de la quartique on trouve $S/\mathfrak{c} = k[\epsilon], \epsilon^2 = 0$ et $S^* = (R/\mathfrak{c})^* = k^*$. Et donc $\mathcal{P}\mathrm{ic}(\mathcal{C}) \cong k[\epsilon]^*/k^* \cong \mathbb{G}_a$ car $k[\epsilon] = k[X]/(X^2) \Rightarrow k[\epsilon]^* = \{a\epsilon + b, b \neq 0\}$ et en quotientant par $k^* \Rightarrow \{a\epsilon + 1, a \in k\} \cong \boxed{\mathbb{G}_a}$

6. La quartique de $\mathbb{P}^3$

Soit k un corps algébriquement clos et soit Y la courbe de $\mathbb{P}^3_k$ d'équation paramétrique $[t^4, t^3u, tu^3, u^4] = [x, y, z, w]$ où $(t, u) \in k^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Alors :

- $\boldsymbol{Y \cong \mathbb{P}^1}$
- L'idéal annulateur de Y est $\boldsymbol{\mathcal{I}(Y) = (XW - YZ, Y^3 - X^2Z, Z^3 - W^2Y, WY^2 - XZ^2)}$
- **Y est normale mais n'est pas projectivement normale**

En effet considérons l'application

$$\boldsymbol{\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3}$$
$$\boldsymbol{[t, u] \longrightarrow [t^4, t^3u, tu^3, u^4]}$$

φ est régulière car ses composantes sont homogènes et ne s'annulent pas simultanément. Elle est injective car si $t \neq 0$ $[1, u, u^3, u4] = [1, u', u'^3, u'^4] \Rightarrow u = u' \Rightarrow [1, u] = [1, u']$ et si $t = 0$ $[0, u] = [0, u']$

De plus $\varphi^{-1} : Y \longrightarrow \mathbb{P}^1$ est régulière car sur $\{x \neq 0\} \cap Y$, $\varphi^{-1}([1, y, z, w]) = \varphi^{-1}([1, u, u^3, u^4]) = [1, y]$ régulière. Sur $\{w \neq 0\} \cap Y$ $\varphi^{-1}([x, y, z, 1]) = [z, 1]$ régulière. Or Y est recouvert par les deux ouverts affines $\{x \neq 0\}$ et $\{w \neq 0\}$, donc φ^{-1} est régulière. Donc $\boxed{Y \cong \mathbb{P}^1}$.

Soit $I = (XW - YZ, Y^3 - X^2Z, Z^3 - W^2Y, WY^2 - XZ^2)$. Alors $I \subset \mathcal{I}(Y)$ car $[t^4, t^3u, tu^3, u^4]$ vérifient les 4 relations précédentes des générateurs de I. De plus si $P \in \mathcal{I}(Y)$, alors on va réduire P mod I pour trouver Q plus simple tel que $P \equiv Q$ mod I ce qui impliquera $Q \in \mathcal{I}(Y)$ car $I \subset \mathcal{I}(Y)$. Puis on montrera que $Q \equiv 0$ ce qui impliquera $P \in I$ et donc $I = \mathcal{I}(Y)$.

Soit un terme du type $X^\alpha Y^\beta Z^\gamma W^\delta$. On raisonne mod I. Grace à $XW = YZ$ on le réduit en :
$X^{\alpha+\beta-\gamma} Y^{\beta-\gamma} W^{\delta+\beta-\gamma}$ si $\beta \geq \gamma$
$X^{\alpha+\beta-\gamma} Z^{\beta-\gamma} W^{\delta+\beta-\gamma}$ si $\beta \leq \gamma$

Puis si $\beta \geq \gamma$ grace $Y^3 = X^2Z$ le nouveau monome $X^{\alpha'} Y^{\beta'} W^{\delta'}$ devient si $\beta' \geq 3$; $X^{\alpha'+2} Y^{\beta'-3} Z W^{\delta'}$ puis si $\beta' \geq 4$ grace à $XW = YZ$,$X^{\alpha'+3} Y^{\beta'-4} W^{\delta'+1}$. Par récurrence on fait ainsi décroitre le degré de Y jusqu'a ce qu'on ait que des termes en Y et Z

de degré ≤ 2. De même si $\beta \leq \gamma$ par symétrie en utilisant $Z^3 = W^2Y$ et $XW = YZ$. On obtient finalement

(5)

$$\boldsymbol{P \equiv a(X,W) + b(X,W)Y + c(X,W)Y^2 + d(X,W)Z + e(X,W)Z^2} \bmod I$$

Mais $\forall (t,u)\ P(t^4, t^3u, tu^3, u^4) = 0 \Longrightarrow P(T^4, T^3U, TU^3, U^4) = 0$

$$\Rightarrow a(T^4,U^4) + b(T^4,U^4)T^3U + c(T^4)T^6U^2 + d(T^4,U^4)TU^3 + e(U^4)T^2U^6 = 0$$

En regardant les degrés des polynomes en T et U mod 4 on obtient:

- $0/T$ et $U \Rightarrow a(T^4,U^4) = 0 \Rightarrow a(X,W) = 0$ (k alg. clos)
- $3/T$ et $1/U \Rightarrow b(X,W) = 0$
- $1/T$ et $3/U \Rightarrow d(X,W) = 0$
- $2/T$ et $U \Rightarrow c(T^4)T^6U^2 + e(T^4,U^4)T^2U^6 = 0$
  $\Rightarrow c(T^4,U^4)T^4 + e(T^4,U^4)U^4 = 0$
  $\Rightarrow c(X,W)X + e(X,W)W = 0$
  $\Rightarrow c(X,0) = e(0,W) = 0 \Rightarrow \exists c_0, e_0, c = Wc_0$ et $e = Xe_0$
  Mais $cX + eW = 0 \Rightarrow c_0 + e_0 = 0$
  $\Rightarrow cY^2 + eZ^2 \equiv WY^2(c_0+e_0) \equiv 0 \bmod I$ grace à $WY^2 = XZ^2 \bmod I$

Donc $P \in I$, soit $\boxed{I = \mathcal{I}(Y)}$.
Mais on a en plus montré que tout $P \in S(Y)$ s'écrit presque de facon unique sous la forme de (5) car on a unicité dans cette écriture de $a, b, d, cX + eW \in k[X,W]$.

Y n'est pas projectivement normale car Y est irréductible ($Y \cong \mathbb{P}^1$) et dans $\mathcal{F}rac(S(Y))$: $\left(\frac{YW}{Z}\right)^2 = \frac{Y.YW^2}{Z^2} = YZ$ car $YW^2 = Z^3$ (Z inversible car $Z \notin I$). Donc $\frac{YW}{Z}$ est entier, cependant $\frac{YW}{Z} \notin S(Y)$ car $\frac{YW}{Z} \equiv P(X,Y,Z,W) \Rightarrow YW - ZP(X,Y,Z,W) \in I \Rightarrow T^3U^5 - TU^3P(T^4,T^3U,TU^3,U^4) = 0 \Rightarrow T^2U^2 = P(T^4,T^3U,TU^3,U^4)$ impossible.

Donc S(Y) n'est pas intégralement clos.

Mais on peut faire encore mieux. En mesurant de combien notre cône n'est pas normal. Pour cela on rappelle que $\forall d \geq 0$ on a la suite exacte :

(6)

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{\Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_Y(d))} \longrightarrow \boldsymbol{\Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d))} \longrightarrow \boldsymbol{\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(d))} \longrightarrow \boldsymbol{H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_Y(d))} \to \mathbf{0}$$

Calculons $\forall d \geq 0\ \ \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(d))$.
Y est recouvert par $D_+(X)$ et $D_+(W)$, donc se donner une section globale de $\mathcal{O}_Y(d)$ sur Y est équivalent à se donner deux sections sur $D_+(X)$ et $D_+(W)$ coincidant sur leur intersection, soit deux éléments homogènes de degré d de S_X et S_W dont l'image coincide dans S_{XW} Cependant S est intégre et donc $S \hookrightarrow S_X, S_W \hookrightarrow S_{XW}$. Donc $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(d)$ n'est autre que l'ensemble des éléments de degré d de $S_X \cap S_W \subset S_{XW}$.

Pour déterminer cette intersection rappelons que tout élément de S s'écrit de maniére presque unique sous la forme (5). Donc si $d \geq 0$ tout élément homogène de degré d de S_{XW} sécrit sous la forme $P/(X^\alpha Y^\beta)$ avec $P \in S$ homogène de degré $d - \alpha - \beta$ et donc cet élément s'écrit $a + bY + cY^2 + dZ + eZ^2$ où a, b, c, d, e sont homogènes de degrés respectifs

$d-2, d-1, d, d-1, d-2$ dans $k[X,W]_{XW}$. Mais alors $P/(X^\alpha W^\beta) = Q/(X^{\alpha'}W^{\beta'}) \Rightarrow$ en multipliant par XW à une puissance suffisement grande et en utilisant l'unicité de a, b, d l'unicité de $a = \frac{a'}{X^\alpha W^\beta}, b = \frac{b'}{X^\alpha W^\beta}, d = \frac{d'}{X^\alpha W^\beta}$. Donc si $s = a + bY + cY^2 + dZ + dZ^2$ homogène de degré d alors on a unicité de $a, b, d \in S_{XW}$. Mais donc $s \in S_X \cap S_W \Rightarrow a, b, d \in k[X,W]_X \cap k[X,W]_W$. Ce sont donc des sections globales de $\mathcal{O}_{P^1_{k[X,W]}}(i), i \in \{d-2, d-1, d-1\}$ que l'on connait: ce sont exactement des éléments de $k[X,W]_i$ si $i \geq 0$ et 0 sinon. Et donc $a + bY + dZ \in S_d$.

Reste le cas de $cY^2 + dZ^2$. L'invariant associé de $k[X,W]$ est $cX + eW$. Donc $cY^2 + dZ^2 \in S_X \cap S_W \Rightarrow cX + eW \in k[X,W]_X \cap k[X,W]_W$ et donc comme précédemment $\in k[X,W]_{d-1}$. Mais si $c_0 = \frac{c}{W}, e_0 = \frac{e}{X}$ alors $XW(c_0 + e_0) \in k[X,Y]_{d-1}$. Et dès lors $cY^2 + eZ^2 = c_0XY^2 + e_0WZ^2 = \frac{Y^2}{X}[(e_0 + c_0)XW]$ car $WY^2 = XZ^2$.

Si $d \geq 2$, $Y^2/X(\sum X^iW^j)$ où $i + j \geq 1$ donne des termes du type $Y^2X^{i-1}W^j \in S$ si $i \geq 1$, et (avec $WY^2 = XZ^2$) $Y^2X^{i-1}W^j = Z^2X^iW^{j-1} \in S$ si $i = 0$. Donc $s \in S$. Et donc $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(d)) = S_d$, ou de facon équivalente $\boxed{H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_Y(d)) = 0}$

Si $d = 0$ alors $cX + eW \in \Gamma(\mathbb{P}^1_{k[X,W]}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = 0$. Donc $cY^2 + WZ^2 = WY^2(c_0 + e_0) = 0$. Donc $\boxed{H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_Y(0)) = 0}$.

Si $d = 1$ alors en reprenant l'écriture $\frac{Y^2}{X}\sum$, des termes du type $\frac{Y^2}{X}$ apparaissent en plus des termes de S. Or on a vu que $\frac{Y^2}{X} \notin S$. De plus $\frac{Y^2}{X} = \frac{Z^2}{W} \in S_X \cap S_W$.
Donc $\boxed{\Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) = S_1 \bigoplus k.\frac{Y^2}{X}}$. Et $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_Y(1)) \neq 0$
On obtient ainsi la normalisation de S, $\boxed{\widetilde{S} = S[Y^2/X]}$.
On peut également calculer $\dim(H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_Y(0)))$ en remarquant que $\Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_Y(1)) = I_1 = 0$ (il suffit de regarder les générateurs de I) et que donc grace à (6) $\boxed{\dim(H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_Y(1))) = 1}$.
Avec (6) on peut également calculer $\dim(I_d)$ pour $d \geq 2$. On trouve $C^d_{3+d} - 5d + 1$.

Calcul de Pic(S) :

D'après le th.8 il faut d'abord calculer le conducteur $\mathfrak{c}$ de S dans $\widetilde{S} = S \oplus k.Y^2/X$. Mais $\frac{Y^2}{X} = \frac{XZ}{Y} = \frac{Z^2}{W} = \frac{WY}{Z}$. Et donc $\boxed{\mathfrak{c} = (X, Y, Z, W) = S_+}$
Donc $\widetilde{S}/\mathfrak{c} = k$. De plus on remarque que $\widetilde{S}$ est gradué par une graduation dont la restriction à S est celle de S et que donc $\boxed{\widetilde{S}^* = k^*}$.
On a $S/\mathfrak{c} = (S \oplus k.\frac{Y^2}{X})/(S_+ \oplus 0) = k \oplus \frac{Y^2}{X}$ mais $(Y^2/X)^2 \in S_+$ et donc : $\boxed{S/\mathfrak{c} \cong k[\epsilon]}$.
On en déduit $\boxed{\mathcal{P}\mathrm{ic}(C) \cong \mathbb{G}_a}$.

7. Généralisations et conjectures

7.1. Groupes de Chow. On sait que pour les groupes de Chow on a également une suite exacte d'excision pour un fermé. Donc en reprenant le th.2

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{CH}^\bullet(\Sigma) & \xrightarrow{i_*} & \mathrm{CH}^\bullet(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^\bullet(\mathcal{C}\setminus\{\Sigma\}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \mathrm{CH}^\bullet(\mathbb{A}^1) & \xrightarrow{p_*} & \mathrm{CH}^\bullet(\mathcal{D}) & & & & \end{array}$$

Qui montre que $\boxed{\mathrm{CH}^\bullet(\mathcal{C}) \cong \mathrm{CH}^\bullet(\mathcal{C}\setminus\Sigma)}$ (car p_* défini car p fini et $\forall i > 0$ $\mathrm{CH}^i(\mathbb{A}^1) = 0$)

Reprenant de même la suite 2 :

$$\mathrm{CH}^\bullet(\mathfrak{X}) \xrightarrow{i_*} \mathrm{CH}^\bullet(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathrm{CH}^\bullet(\mathcal{B}\setminus\mathfrak{X}) \longrightarrow 0$$

on montre (modulo l'invariance d'hopmotopie) que : $\boxed{\mathrm{CH}^\bullet(\mathcal{C}) \cong \dfrac{\mathrm{CH}^\bullet(\mathfrak{X})}{c_1(\mathfrak{L}).\mathrm{CH}^\bullet(\mathfrak{X})}}$ où $c_1(\mathfrak{L}) \in \mathrm{CH}^1(\mathfrak{X})$ désigne la classe de Chern de $\mathfrak{L}$.

7.2. Trivialité des fibrés. La trivialité du groupes de Picard d'un cone normal ainsi que le th.3 amènent à poser la question de la trivialité des fibrés d'un cone Normal. On a en effet une réponse partielle :

Théorème 9. *(Srinivas) Si $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ est une k algèbre graduée de type fini avec $A_0 = k$ alg.clos. Alors tout fibré sur $\mathcal{S}pec(A)$ est trivial (ou de facon equivalente tout A-module projectif est libre) dans l'une des trois conditions suivantes :*

- *$c(k) = p > 0$ et A est normal de dim.2 (cône sur une courbe projectivement normale)*
- *$c(k) = 0$ et $\mathcal{S}pec(A)$ est le cône sur une courbe X projectivement normale $\subsetneq \mathbb{P}^n$ avec $deg(X) \leq 2n-1$*
- *$c(k) = 0$ et $A = \bigoplus_{n\geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD))$ où X est une courbe lisse de genre g et D un diviseur sur X tel que $deg(D) \geq 2g+1$*

7.3. Contre exemples en caractéristique 0. En caractéristique 0 le problème de savoir quand le K_0 d'un cône normal est $\mathbb{Z}$ n'est pas résolu. Ainsi on a le

Théorème 10. *Si $L = \overline{\mathbb{Q}}^{\mathbb{C}}$ est le corps des nombres algébriques et si $X \subset \mathbb{P}^n_L$ est une courbe projectivement normale telle que $H^1(X, \mathcal{O}_X(1)) \neq 0$. Alors si $\mathcal{C}$ est le cône sur $X_{\mathbb{C}} = X \times_{\mathcal{S}pec(L)} \mathcal{S}pec(\mathbb{C})$ la courbe complexe associée on a $K_0(\mathcal{C}) \neq \mathbb{Z}$*

8. Conséquences pour la quartique de $\mathbb{P}^3$

	$\mathcal{P}$ic	$\mathrm{CH}^\bullet$	K_0	K'_0
$X \cong \mathbb{P}^1$	$\mathbb{Z}$	$\mathrm{CH}^1 = \mathbb{Z}, \mathrm{CH}^i = 0, i > 1$	$K_0 = K'_0 = \mathbb{Z} \oplus \mathcal{P}\mathrm{ic}(X) = \mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}^2$
$\mathcal{C}$	$\mathbb{G}_a$	$\mathrm{CH}^1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ $\mathrm{CH}^2 = 0$	? mais $\neq \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
$\mathcal{C}' = \tilde{\mathcal{C}}$	$0(th.7)$	$\mathrm{CH}^1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ $\mathrm{CH}^2 = 0$	$\mathbb{Z}$ si $c(k) > 0$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

9. Annexe : Propriétés des groupes de K-théorie

9.1. Définitions. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec suite exacte ayant un petit squelette (ce qui implique que les classes d'isomorphisme d'objets de cette catégorie forment un ensemble) on définit $K_0(\mathcal{C})$ comme étant le groupe abélien libre sur les classes d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{C}$ quotienté par les relations $[\mathcal{F}] - [\mathcal{F}'] - [\mathcal{F}'']$ dès que l'on a une suite exacte $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$. On peut définir d'une facon similaire $K_1(\mathcal{C})$ ([Rose] p.113).

On remarque alors que si T est un foncteur exacte de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, T induit un morphisme de $K_0(\mathcal{C})$ dans $K_0(\mathcal{C}')$ (et de même pour K_1).

Cependant on peut définir plus généralement des groupes de K-théorie supérieure : $K_i(\mathcal{C})$ $\forall i \in \mathbb{N}$ (cf. [High] ou [Rose] chap.5) de deux facons ($\pm$ construction ou Q-construction). Ainsi par exemple dans la Q-construction $K_i(\mathcal{C}) = \pi_{i+1}(BQ\mathcal{C})$ où $BQ\mathcal{C}$ est l'espace classifiant associé à $\mathcal{C}$.

Ceux-ci vérifient comme première propriété que si $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est un foncteur exact alors T induit un morphisme $T_* : K_i(\mathcal{C}) \to K_i(\mathcal{C}')$.

Ainsi par exemple si X est un schéma l'inclusion de catégorie des faisceaux localement libres (de rang fini) dans les faisceaux cohérents induit un morphisme $\forall i$: $K_i(X) \to K_i'(X)$ où K_i et K_i' désigent réspectivement les K_i de ces deux catégories.

On peut également montrer que les K_i vérifient également le théorème de résolution (cf. annexe 10).

9.2. Le lien arithmétique-géométrie algébrique. On remarque que si A est un anneau Noethérien alors les K_i de la catégorie des A-modules de type fini sont égaux aux K_i de la catégorie des faisceaux cohérents sur $\mathcal{S}\mathrm{pec}(A)$. (cf. équivalence de catégorie entre les deux en affine et exactitude de $M \to \widetilde{M}$ et de $\mathcal{F} \to \Gamma(\mathcal{S}\mathrm{pec}(A), \mathcal{F})$)

Le lien pour les fibrés vectoriels est le même : si A est un anneau $K_i(A)$ désignera le K_i de la catégorie des A-modules projectifs tandis que $K_i(X)$, où X est un schéma, désignera le K_i de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres.
Le lien entre les deux est alors le suivant :

Proposition 1. $K_i(A) = K_i(Spec(A))$

Cela résulte en effet du théorème suivant :

Théorème 11. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ modules sur un schéma $\mathfrak{X}$. Alors sont équivalents :*

- *$\mathcal{F}$ est localement libre de rang fini*
- *$\mathcal{F}$ est cohérent et $\forall P$ $\mathcal{F}_P$ est libre*
- *Pour tout ouvert affine $U = \mathcal{S}pec(A)$ de $\mathfrak{X}$, $\mathcal{F}_{|U}$ est un A-module projectif de type fini*

Et donc $\forall \boldsymbol{U} = \boldsymbol{\mathcal{S}pec(A)}, \boldsymbol{\mathcal{F}_{|U}} \cong \widetilde{\boldsymbol{M}}$ ***où M est projectif de type fini***

9.3. Propriétés fonctorielles des K_i. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas Noethériens. On remarque alors que :

$$\mathcal{F} \text{ cohérent} \Rightarrow \begin{cases} f^*\mathcal{F}\text{cohérent} & \text{dans tous les cas ([Hart] II,5.8)} \\ f_*\mathcal{F}\text{cohérent} & \text{si} f \text{est} \begin{cases} \text{fini} \\ \text{ou projectif ([Hart] II,5.20)} \\ \text{ou plus généralement propre ([EGA] III,3.2.1)} \end{cases} \end{cases}$$

$\mathcal{F}$ loc.libre de rang fini $\Rightarrow$ $f^*\mathcal{F}$ également (car sur des ouverts affines $f^*(\widetilde{M}) = M \otimes_B A$)

Mais que de plus si $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ est exacte alors :

$$\begin{cases} \text{loc.libres} \Rightarrow 0 \to f^*\mathcal{F}' \to f^*\mathcal{F} \to f^*\mathcal{F}'' \to 0 \text{ car sur les fibres} \\ \qquad (f^*\mathcal{F})_P = \mathcal{F}_{f(P)} \otimes_{\mathcal{O}_{f(P),Y}} \mathcal{O}_{P,X} \text{ et } \mathcal{F}_{f(P)} \text{ est libre} \\ \text{cohérents} \Rightarrow \begin{cases} 0 \to f_*\mathcal{F}' \to f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{F}'' \to 0 \;\text{ si } \mathfrak{X} \text{ est recouvert par des ouverts affines} \\ \text{d'image réciproque} \quad \text{affine (ce qui est le cas si } f \\ \text{ est fini) car sur un ouvert affine } f_*\widetilde{N} =_B N \text{([Hart] II,5.2)} \\ 0 \to f^*\mathcal{F}' \to f^*\mathcal{F} \to f^*\mathcal{F}'' \to 0 \;\text{ si f est plat} \end{cases} \end{cases}$$

On remarque que si f est seulement propre alors f_* n'est pas exacte sur les cohérents contrairement au cas où f est fini et que donc $[\mathcal{F}] \to \underbrace{[f_*\mathcal{F}]}$ n'est pas défini dans K_0. Cependant si $\mathfrak{X}$ est Noethérien et $\mathcal{F}$ cohérent $R^if_*(\mathcal{F}) \cong \widetilde{H^i(\mathfrak{X}, \mathcal{F})}$ ([Hart] III,8.5) (où les H^i sont les H^i de la cohomologie des foncteurs dérivés) et donc $R^if_*(\mathcal{F})$ est quasicohérent. Mais si de plus f est propre alors $R^if^*(\mathcal{F})$ est cohérent (EGA III,3.2.1).

Et donc de la suite exacte longue des foncteurs dérivés on en déduit que si l'on a une suite exacte de cohérents $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ et que f est propre on obtient alors une suite exacte longue de cohérents :

$$0 \to f_*\mathcal{F}' \to f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{F}'' \to R^1f_*(\mathcal{F}') \to R^1f_*(\mathcal{F}) \to R^1f_*(\mathcal{F}'') \to R^2f_*(\mathcal{F}') \to \dots$$

nulle pour i suffisemment grand si par exemple X est de dimension finie (car alors pour $i >> 0 H^i(X, \mathcal{F}) = 0$) . Donc par le même argument que dans la preuve du théoréme de résolution la caractéristique d'Euler-Poincaré de cette suite est nulle dans K'_0, soit :

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i [R^if_*(\mathcal{F})] = \sum_{i \geq 0} (-1)^i [R^if_*(\mathcal{F}')] + \sum_{i \geq 0} (-1)^i [R^if_*(\mathcal{F}'')]$$

qui nous donne la bonne formule pour f_* dans le cas de K_0 : $\sum_{i \geq 0}[R^if_*(\mathcal{F})]$, qui nous redonne bien pour f fini la formule précédente car alors $\forall i > 0$ $R^if_*(\mathcal{F}) = 0$.

Une facon de formaliser ceci $\forall i$ est d'utiliser le théorème de résolution ainsi :

Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des faisceaux cohérents tels que $\forall i > 0$ $R^if_*(\mathcal{F}) = 0$. Supposons (sous de bonnes hypothèses de dimension) que tout faisceau cohérent admette une résolution finie par des éléments de $\mathcal{C}$. Alors $\mathcal{C}$ est stable par noyaux (i.e. si $\mathcal{F} \xrightarrow{u} \mathcal{F}'$ est surjectif alors $\ker(u) \in \mathcal{C}$) grace à la suite exacte longue associée à $0 \to \ker(u) \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to 0$.

Donc $K_i(X) \cong K_i(\mathcal{C})$ par le théoréme de résolution mais alors $f_* : K_i(\mathcal{C}) \to K_i(Y)$ qui à $[\mathcal{F}]$ associe $[f_*\mathcal{F}]$ est bien défini et est un morphisme. On définit alors f_* comme étant la composée de $K_i(X) \cong K_i(\mathcal{C}) \xrightarrow{f_*} K_i(Y)$. On vérifie alors facilement que l'on retrouve bien $\sum_{i\geq 0}(-1)^i R^i f_*(\mathcal{F})$ dans le cas de K_0 (ceci est une conséquence du fait que si $C_\bullet$ est un complexe dans la catégorie $\mathcal{C}$ dont l'homologie $H_\bullet C$ est dans $\mathcal{C}$ alors $\chi(C_\bullet) = \chi(H_\bullet C)$).

De la même facon on peut essayer de définir f^* lorsque f n'est pas plat mais de dimension plate finie (i.e. $\forall \mathcal{F}$ cohérent et pour $i >> 0$ $Tor_i^{f^{-1}\mathcal{O}_Y}(f^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = 0$ (où $Tor_\bullet^{\mathcal{O}_Z}$ est le foncteur dérivé de $\bigotimes_{\mathcal{O}_Z}$)) $f^* : K_0'(Y) \to K_0'(X)$ par $\sum_{i\geq 0}(-1)^i [Tor_i^{f^{-1}\mathcal{O}_Y}(f^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)]$.

On en déduit donc les foncteurs K_i et K_i' :

$$\boxed{\begin{cases} f \text{ propre et } X \text{ de dim.finie} \Rightarrow f_* : K_i'(X) \to K_i'(Y) \text{ (si i=0,à } [\mathcal{F}] \text{ associe} \sum_{i\geq 0}(-1)^i [R^i f_*(\mathcal{F})]) \\ f \text{ fini } \Rightarrow f_* : K_i'(X) \to K_i(Y) \\ f \text{ "satisfaisant de bonnes hypothéses"} \Rightarrow f^* : K_i'(Y) \to K_i'(X) \\ \qquad\qquad \text{(si i=0, à } [\mathcal{F}] \text{ associe} \sum_{i\geq 0}(-1)^i [Tor_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, f^{(-1)}\mathcal{O}_Y)]) \\ f \text{ plat} \Rightarrow f^* : K_i'(Y) \to K_i'(X) \\ f \text{ quelconque} \Rightarrow f^* : K_i(Y) \to K_i(X) \end{cases}}$$

On remarquera qu'en affine f^* permet de retrouver le foncteur habituel de la K-Théorie des modules qui est le foncteur changement de base $M \to M \otimes_A B$.

Si $\mathcal{Y} \xrightarrow{i} X$ est un sous shcéma fermé de X alors i_* n'est autre que l'extension par 0 des faisceaux cohérents en dehors de $\mathcal{Y}$.
Ainsi si par exemple $\mathcal{Y} = \{P\}$ un point fermé de X alors i_* est l'application qui va de $K_0'(P) = \mathbb{Z}$ dans $K_0'(X)$ qui à $n \in \mathbb{N}$ associe le faisceau gratte-ciel concentré en P et libre de rang n en P.

Si $\mathcal{Y} \xrightarrow{i} X$ est un sous schéma ouvert alors i^* est défini sur K_0 et K_0' et n'est autre que la restriction des faisceaux au sous schéma ouvert.

9.4. La structure d'anneau et de module. $K_0(X)$ est muni d'une structure d'anneau via $\bigotimes$. En effet les faisceaux étants localement libres lorsqu'on tensorialise une suite exacte celle-ci reste exacte, d'où la distributivité de la multpilication par rapport à l'addition (le reste est évident). L'unité de cet anneau est $\mathcal{O}_X$.

De plus $K_0'(X)$ est muni d'une structure de $K_0(X)$-module grace à $\bigotimes$ car une suite exacte de cohérents tensorialisée par un loc.libre est encore exacte.

Tout ceci est le cas particulier du fait que si T est un bifoncteur biexacte (i.e. exacte par rapport à chaque variable séparément) de $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ dans $\mathcal{D}$ alors on a une application bilinéaire $\forall i, j \geq 0$:
$K_i(\mathcal{C}_1) \times K_j(\mathcal{C}_2) \to K_{i+j}(\mathcal{D})$.

9.5. L'application déterminant. Si $\mathfrak{X}$ est un schéma connexe et si $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel $\mathfrak{X}$ de rang n on définit sont déterminant comme étant le fibré inversible $\bigwedge^n \mathcal{F}$.

On vérifie que l'on définie bien ainsi un morphisme de groupe de $K_0(\mathfrak{X}) \to \mathcal{P}\mathrm{ic}(\mathfrak{X})$ en vérifiant que pour des fibrés :

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0 \Longrightarrow \bigwedge^n \mathcal{F} \cong \left(\bigwedge^{r_1} \mathcal{F}'\right) \otimes \left(\bigwedge^{r_2} \mathcal{F}''\right)$$

([Hart] Ex 5.16 p127)

10. Annexe : Le théorème de Résolution

Théorème 12. *Si i désigne l'inclusion de la catégorie des faisceaux localement libres dans la catégorie des faisceaux cohérents sur $\mathfrak{X}$ alors $i_* : K_0(\mathfrak{X}) \to K_0'(\mathfrak{X})$ induit un isomorphisme d'inverse l'application bien définie Caractéristique d'Euler-Poincaré χ qui à $[\mathcal{F}] \in K_0'(\mathfrak{X})$ associe $\sum_i (-1)^i [\mathcal{P}_i]$ où $0 \to \mathcal{P}_n \to \cdots \to \mathcal{P}_0 \to \mathcal{F} \to 0$ est une résolution finie de $\mathcal{F}$ par des $\mathcal{P}_i$ localement libre.*

Le plus dur est en fait de montrer que χ est bien définie. En effet supposons le démontré. Alors $\chi i_* = Id_{K_0(\mathfrak{X})}$ trivialement et si $[\mathcal{F}] \in K_0'(\mathfrak{X})$ est tel que l'on ait une résolution $0 \to \mathcal{P}_n \to \cdots \to \mathcal{P}_0 \to \mathcal{F} \to 0$ alors $i_*\chi([\mathcal{F}]) = \sum_i (-1)^i [\mathcal{P}_i] \in K_0'(\mathfrak{X})$ que l'on veut égal à $[\mathcal{F}]$. Il suffit donc de montrer que si les $\mathcal{F}_i$ sont cohérents tels que $0 \longrightarrow \mathcal{F}_n \xrightarrow{\partial_n} \dots \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{F}_0 \longrightarrow 0$ alors $\sum_i (-1)^i [\mathcal{F}_i] = 0 \in K_0'(\mathfrak{X})$. Une récurrence sur n le montre. En effet une telle suite exacte se scinde en deux suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_n \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{F}_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} Im\partial_{n-1} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Im\partial_{n-1} \longrightarrow \mathcal{F}_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \dots \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{F}_0 \longrightarrow 0$$

Mais les faisceaux cohérents sont stables par image ([Hart] II, 5.7) Et donc en appliquant l'hypothèse de récurrence à la suite du bas et en écrivant $[\mathcal{F}_{n-1}] = [\mathcal{F}_n] + [Im\partial_n]$ on obtient le résultat soit $\boxed{i_*\chi = Id}$

Pour montrer que χ est bien définie On remarque que dans le cas où $\mathfrak{X}$ est affine le problème est équivalent à celui des résolutions de modules de type fini par des modules projectifs de type fini. Or on sait que deux résolutions projectives ont même type d'homotopie. On voudrait donc appliquer le même type de procédé, en montrant que deux résolutions ont même type d'homotopie. Cependant il faut être un peu plus subtil.

On montre d'abord que si l'on a une résolution finie $\mathcal{P}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{F}$ et un morphisme $\beta : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ alors on peut trouver $\mathcal{P}'_\bullet$ résolution de $\mathcal{F}'$ et $\beta_\bullet$ tels que l'on ait le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & \mathcal{P}'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] \arrow[d] & \mathcal{P}'_n \arrow[r] \arrow[d, "\beta_n"] & \dots \arrow[r] & \mathcal{P}'_0 \arrow[r, "\epsilon'"] \arrow[d, "\beta_0"] & \mathcal{F}' \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathcal{P}_n \arrow[r] & \dots \arrow[r] & \mathcal{P}_0 \arrow[r, "\epsilon"] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En effet supposons construits β_i et $\mathcal{P}'_i$ $\forall i \leq q$. Alors on a :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{P}'_q \arrow[r, "\partial'_q"] \arrow[d, "\beta_q"] & \mathcal{P}'_{q-1} \arrow[d, "\beta_{q-1}"] \\
\mathcal{P}_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & \mathcal{P}_q \arrow[r, "\partial_q"] & \mathcal{P}_{q-1}
\end{tikzcd}
\Longrightarrow
\begin{tikzcd}
 & Z_q\mathcal{P}' \arrow[d, "\beta_q"] & \\
\mathcal{P}_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & Z_q\mathcal{P} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Et donc $\mathcal{P}_{q+1} \oplus Z_q\mathcal{P}' \overset{\partial_{q+1} \oplus -\beta_q}{\to} Z_q\mathcal{P}$ est surjectif . Soit K le noyau de cette surjection. K est cohérent, donc $\exists\ \mathcal{P}'_{q+1} \twoheadrightarrow K$ où $\mathcal{P}'_{q+1}$ est localement libre. Alors on vérifie que $\beta_q : \mathcal{P}'_{q+1} \twoheadrightarrow K \hookrightarrow \mathcal{P}_{q+1} \oplus Z_q\mathcal{P}' \twoheadrightarrow \mathcal{P}_{q+1}$ convient. On complète ainsi le diagramme jusqu'à ce qu'on ait $\mathcal{P}_q = 0$ (Pour l'initialisation de la récurrence on applique à $\beta = \beta_{-1}$) . On pose $\beta_i = 0$ et on compléte par une résolution loc.libre de $Z_q\mathcal{P}'$ cohérent que l'on recolle à la résolution construite précédemment.

Soient alors $\mathcal{P}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{F}$ et $\mathcal{P}_\bullet \xrightarrow{\epsilon'} \mathcal{F}'$ sont deux résolutions de $\mathcal{F}$ alors appliquons le résultat précédent à $\Delta : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}$ l'application diagonale et à la résolution $\mathcal{P}_\bullet \oplus \mathcal{P}'_\bullet$ de $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}$. On obtient alors $\mathcal{P}''_\bullet$ telle que :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{P}''_n \arrow[r] \arrow[d, "\beta_n \oplus \beta'_n"'] & \dots \arrow[r] & \mathcal{P}''_0 \arrow[r, "\epsilon''"] \arrow[d, "\beta_0 \oplus \beta'_0"'] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{P}_n \oplus \mathcal{P}'_n \arrow[r] & \dots \arrow[r] & \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{P}'_0 \arrow[r, "\epsilon \oplus \epsilon'"] & \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Alors $\beta_\bullet : \mathcal{P}''_\bullet \to \mathcal{P}_\bullet$ et $b'_\bullet : \mathcal{P}''_\bullet \to \mathcal{P}'_\bullet$ sont des application de chaines qui sont des isomorphismes en homologie car on a affaire à des complexes nuls en homologie pour $i \neq 0$ et tels que $H_0 = \mathcal{F}$. $\beta_* = \beta'_* = Id_{\mathcal{F}}$. Donc leur cône d'application est acyclique $\Rightarrow \chi(C_\beta) = \chi(C'_\beta) = 0$ d'après l'étude du début (si on a une suite exacte de cohérents alors sa caractéristique d'Euler-Poincarré est nulle dans $K'_0(\mathfrak{X})$). Mais $C_n = \mathcal{P}_n \oplus \mathcal{P}''_{n-1} \Rightarrow$ $\chi(C_\beta) = 0 = \chi(\mathcal{P}) - \chi(\mathcal{P}'')$ et $\chi(C_\beta) = 0 = \chi(\mathcal{P}') - \chi(\mathcal{P}'') \Longrightarrow \boxed{\chi(\mathcal{P}_\bullet) = \chi(\mathcal{P}'_\bullet)}$

Rem.: On a uniquement utilisé le fait que les faisceaux cohérents sont stables par noyau. Mais en fait la démonstration montre que l'on utilise uniquement le fait que les cohérents sont stables par noyau d'une application surjective entre cohérents. C'est bien le cadre du théorème de résolution pour K_0.
Quant à K_i pour $i \geq 1$ il faut rajouter une hypothése à la stabilité par noyau surjectif : la stabilité par extension. Celle-ci est par exemple bien vraie pour les cohérents ([Hart]II.5.7 p.114).

11. Annexe : une autre démonstration du th. 7

Un anneau commutatif réduit sera dit semi-normal si le "cusp sur $A[X,Y]$ est paramétrisable" i.e. si $\forall (x,y) \in A^2\ x^2 = y^3 \Rightarrow \exists (t,u) \in A^2, x = a^3\ y = u^2$. On vérifie notemment que normal implique semi-normal et que si A est intégre, A est semi-normal ssi $\forall a \in \mathrm{Frac}(A), a^2, a^3 \in A \Rightarrow a \in A$.

On utilisera le théorème de *Swan* suivant [1]:

Théorème 1. *Soit A un anneau commutatif. Alors sont équivalents:*

- *A_{red} est semi-normal*
- *$\mathcal{P}ic(A) = \mathcal{P}ic(A[T])$ (via l'inclusion $A \hookrightarrow A[T]$)*

On a alors le résultat suivant :

Théorème 2. *Soit A un anneau commutatif gradué tel que A_{red} soit semi-normal. Alors si $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ et si $i : A_0 \hookrightarrow A$ alors $i_* : \mathcal{P}ic(A_0) \cong \mathcal{P}ic(A)$*

Preuve : On remarque d'abord que i_* est toujours injectif car i admet un inverse à gauche, la projection p sur A_0, et le foncteur covariant $\mathcal{P}$ic transforme p en un inverse à gauche de i_*.

Soit $f : A \to A[T]$ le morphisme d'anneaux gradués (où $A[T]$ est muni de la graduation donnée par T) définie par $f(\sum_i a_i) = \sum_i a_i T^i$. Alors f va transposer la graduation de A en celle de $A[T]$. Montrons quef_* est un isomorphisme. Si $q : A[T] \to A$ est l'évaluation en 0 alors q étant un inverse a gauche de $j : A \hookrightarrow A[T]$ et j_* étant un isomorphisme (th. de Swan), q_* en est un. Donc l'évaluation en $1, e_1$, induit un isomorphisme de groupes de Picard car elle dérive de q par composition avec l'automorphisme $T \to T+1$ de $A[T]$. Mais $e_1 f = Id$ donc f_* est un isomorphisme.

Soit maintenant le diagramme commutatif suivant ainsi que son transformé par le foncteur covariant $\mathcal{P}$ic:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & A[T] \arrow[d, "q"] \\ A_0 \arrow[r, "i"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{P}\mathrm{ic}(A) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "p_*"'] & \mathcal{P}\mathrm{ic}(A[T]) \arrow[d, "q_*"] \\ \mathcal{P}\mathrm{ic}(A_0) \arrow[r, "i_*"] & \mathcal{P}\mathrm{ic}(A_0) \end{tikzcd}$$

L'application f permet de conjuguer p en q et d'appliquer le cas connu de l'anneau gradué $A[T]$.

Ainsi f_* et q_* sont des isomorphismes donc i_* est surjectif.

Donc $\boxed{i_* : \mathcal{P}\mathrm{ic}(A) \cong \mathcal{P}\mathrm{ic}(A_0)}$.

Corollaire 6. *Si A_0 est un corps alors $\mathcal{P}ic(A) = 0$*

Ce qui nous redonne le cas des cônes étudiés précédemment.

[1] R.Swan, On Seminormality,J. Algebra 67(1980),210 -229

12. Annexe : Une esquisse de la preuve du théorème de Srinivas

Pour mieux comprendre le cas des cônes sur un schéma nonsingulier on considére le cas plus général des variétés quasi-projectives ayant des singularités isolées (ce qui est bien le cas des cônes sur un schéma lisse puisque le sommet est la seule singularité).

Ainsi soit Y quasi-projectif et soit S l'ensemble des points singuliers de Y. Alors si $\mathcal{F}$ est cohérent sur Y et si son support ne rencontre pas S $\mathcal{F}$ admet une résolution localement libre $\mathcal{E}_\bullet$ finie. On définit $[\mathcal{F}] \in K_0(Y)$ comme $\chi(\mathcal{E}_\bullet)$ de la même facon que dans le théorème de résolution (et de la même facon $[\mathcal{F}]$ ne dépend pas de la résolution choisie).

Soit alors $Z \subset Y$ un sous schéma fermé ne rencontrant pas S. On pose alors $[Z] = [\mathcal{O}_Z] \in K_0(Y)$.

On a alors la proposition :

Proposition 2. *Si Y est à singularités isolées alors $K_0(Y)$ est engendré par $[\mathcal{O}_Y]$ et la clasee des sous schémas fermés ne rencontrant pas S*

La démonstration consiste à prendre $\mathfrak{L}$ ample sur Y est $\forall\ [\mathcal{E}] \in K_0(Y)$ à tensorialiser $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E} \otimes \mathfrak{L}^n$ avec n suffisemment grand afin d'effacer les singularités qui sont en nombre fini.
Soit maintenant $A_0(Y)$ le sous groupe de $K_0(Y)$ engendré par les points lisses de Y. Le théorème le plus général de Srinivas est alors le suivant :

Théorème 13. *Soit $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ un anneau gradué normal avec $A_0 = k$ un corps algébriquement clos de caractéristique $p>0$ et de type fini comme k-algébre. Supposons que A soit Cohen-Macauley et que S_+ le sommet soit la seule singularité de $\mathcal{S}pec(A)$. Alors* $\boxed{A_0(\mathcal{S}pec(A)) = 0}$.

La preuve consiste à montrer d'abord que $A_0(Y)$ est un groupe divisible. Ceci est une conséquence de la théorie des Jacobiens si Y est une courbe. Si Y n'est pas une courbe on s'y raméne, car si $P \in Y$ est un point lisse on peut trouver une courbe passant par P et ne rencontrant pas les points singuliers de Y.

Puis on montre qu'il existe un $\nu \in \mathbb{N}$ tel que $p^\nu.A_0(Y) = 0$ ce qui permet de conclure que $A_0 = 0$. Une esquisse de la preuve dans le cas d'une courbe lisse $X \subset \mathbb{P}^2$ est la suivante :

Notons $\Pi = \pi \circ \sigma^{-1}_{|\mathcal{C}\setminus\Sigma}$ la projection du cône privé de son sommet $\mathcal{C}\setminus\Sigma \subset \mathbb{A}^3$ sur $X \subset \mathbb{P}^2$. Soit $P \in \mathcal{C}$ un point lisse. Considérons L une droite de $\mathbb{P}^2$ telle que $L \cap X = \{P_1, \ldots, P_n\}$ où $P_1 = \Pi(P)$ et où $n = \deg(X)$. Alors $\Pi^{-1}(L) \cup \Sigma = W \cap \mathcal{C} = l_1 \cup \cdots \cup l_n$ où les l_i sont des droites telles que $\Pi(l_i \setminus \Sigma) = P_i$ et où $W = \Pi^{-1}(L)$ est un plan de $\mathbb{A}^3$. Choisissons alors des coordonées (x, y) dans le plan W telles que l_1 soit l'axe des y, $P \in l_1$ soit de coordonnées (0,1) et telles que les pentes des droites l_i pour $i \geq 2$ soient respectivement $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Ainsi : $W \cap \mathcal{C} = \mathcal{S}\mathrm{pec}\left(\dfrac{k[x,y]}{x.\prod_{i=2}^n (y - \lambda_i x)}\right)$

Considérons maintenant la fonction rationelle $f \in \mathrm{Rat}(l_1 \cup \cdots \cup l_n)$,
$f = 1 - (y - \lambda_2 x)^r \prod_{i=3}^{n} (y - \lambda_i x)$ avec r à choisir plus tard. Alors $f_{|l_1 \cup \cdots \cup l_n} = 1$. Et $f_{|l_1} =$

$1 - y^{r+n-2}$. Choisissons alors r tel que $r + n - 2 = p^\nu$ pour un $\nu > 0$. Alors étant en caractéristique p $f_{|l_1} = (1 - y)^{p^\nu}$. Et donc $\mathrm{Div}(f) = p^\nu.P$. On en déduit que $p^\nu.P = 0 \in \mathcal{P}\mathrm{ic}(W \cap \mathcal{C}) \Rightarrow p^\nu.P = 0 \in A_0(\mathcal{C})$.

Mais $A_0(\mathcal{C})$ est engendré par les points lisses de $\mathcal{C}$ et donc $p^\nu.A_0(\mathcal{C}) = 0$.

On spécialise maintenant le th.13 au cas des cônes au dessus d'une courbe lisse pour obtenir le résultat que l'on voulait :

Corollaire 7. *Soit A satisfaisant les hypothéses du th.13. Alors si* $\dim(A) = 2$ $\boxed{K_0(A) = \mathbb{Z}}$.

Ceci se montre en effet grace à la proposition 2 qui permet de considérer des sous variétés ne rencontrant pas le sommet. On utilise alors le fait que $\mathcal{P}\mathrm{ic}(A) = 0$ par le th.7 pour utiliser le théorème de réduction de Bass qui permet de se ramener à des cas plus simples et d'utiliser $A_0(\mathcal{S}\mathrm{pec}(A)) = 0$.

References

[EGA] A.Grothendieck, *Elements de Geometrie algebrique*, Springer-Verlag

[Hart] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer- Verlag, 1977

[Rose] J.Rosenberg, *Algebraic K-Theory and its Applications*, Springer-Verlag, 1994

[High] *Higher Algebraic K-Theory : an overview* , Lecture Notes in Mathematics 1491, Springer-Verlag 1992

[Srin] V.Srinivas, *Vector Bundles on the Cone over a Curve*, Compositio Mathematica, Vol.47,Fasc.3,1982,pag.249-269

[Varl] Robert Varley, *Vector Bundles on Cones over Projective Schemes*, Inventiones math. 62, 15-22 (1980) Springer-Verlag

[Eise] D.Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry* Springer-Verlag 1991

[Bass] H.Basse, *Algebraic K-Theory.* New York: Benjamin 1968