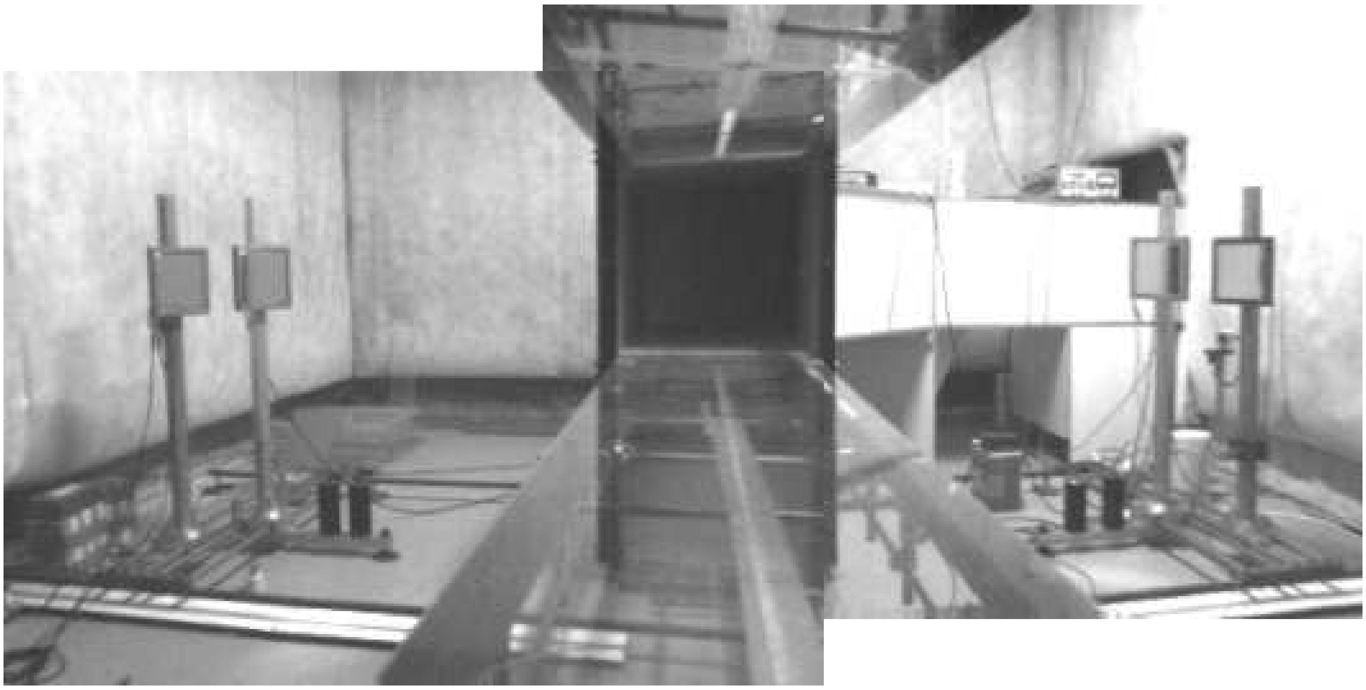
Rapport de stage de deuxième année : Analyse bispectrale d'un écoulement turbulent

Jean-Michel FRIEDT
sous la direction de Christophe BAUDET et Olivier MICHEL

23 juillet 1996



Résumé

L'étude bispectrale d'un écoulement permet d'étudier les couplages non linéaires entre des structures de vorticité caractérisées par trois échelles spatiales sélectionnées par l'observateur. Nous avons vérifié la validité du principe de la sélection d'un vecteur d'onde spatial étudié par diffusion d'une onde acoustique sur les structures dans un écoulement turbulent, puis nous nous sommes servis d'acquisitions sur trois voies pour mesurer la proportion de vortex présents naturellement dans l'écoulement par rapport au nombre de vortex provenant de la brisure de structures à plus grandes échelles. Nous avons enfin montré que malgré l'absence pour le moment de bases théoriques à l'étude bispectrale de la vorticité, des résultats peuvent être tirés de telles mesures.

Table des matières

1 Introduction

Notre objectif dans cette étude est de réaliser une observation de transfert d'énergie entre différentes échelles de vortex dans un écoulement turbulent. Le mode de détection est la diffusion d'ondes acoustiques cohérentes. De la même façon que dans la diffusion de lumière par des molécules polarisables une onde électromagnétique entre en résonance avec les dipôles oscillants que sont les molécules constituant le milieu, l'onde acoustique va dans notre cas entrer en résonance avec les structures présentes dans l'écoulement. Dans une expérience de diffusion, la sélection d'un vecteur d'onde spatial résulte d'une sommation cohérente (condition de phase stationnaire) des ondes réémises par tous les diffuseurs "éclairés" par l'onde incidente. Nous pouvons donc considérer le signal de diffusion de l'onde acoustique par les structures entraînées dans l'écoulement comme un filtre spatial passe-bande dont la fréquence centrale est fixée par le choix du vecteur d'onde observé.

2 Aspect théorique

2.1 Pourquoi cette étude ?

Nous allons tester une méthode qui doit permettre d'observer des structures dans un écoulement turbulent, d'identifier les tailles caractéristiques de ces vortex puis de savoir si des structures à une certaine échelle proviennent de la brisure de structures à plus grandes échelles ou sont naturellement présentes dans l'écoulement. Notre objectif à plus long terme est de pouvoir appliquer cette technique pour observer des écarts à la distribution uniforme du flux d'énergie quelquesoit le point sur la cascade (l'uniformité de la distribution du flux d'énergie sur toutes les échelles est une hypothèse de base de la théorie développée en 1941 par Kolmogorov).

Le modèle de Kolmogorov définit trois zones à partir de la distribution de l'énergie dans un écoulement [1] : une zone de structures à grandes échelles où l'énergie est injectée dans l'écoulement, une zone intermédiaire où les structures se fractionnent et la dissipation d'énergie est faible, et enfin une zone de petits vortex où la dissipation visqueuse d'énergie est importante. Plus l'énergie disponible initialement est élevée, plus nous pourrons aller loin dans la cascade des échelles, jusqu'à ce que toute l'énergie ait été dissipée. La théorie de Kolmogorov 41 établit la prédiction théorique suivante : dans la zone inertielle où la densité spectrale de l'énergie s'exprime en fonction de l'échelle spatiale (vecteur d'onde), l'énergie est transférée des grandes vers les petites échelles (cascade) suivant une loi de puissance d'exposant $-\frac{5}{3}$. C'est justement par rapport à cette prédiction, approximativement vérifiée expérimentalement que nous désirons voir un écart, d'où l'intérêt d'une méthode fiable pour analyser comment se brisent les structures.

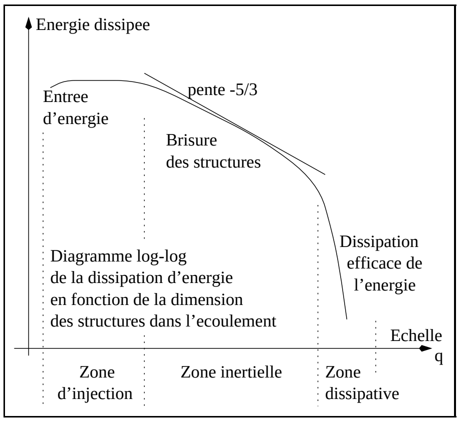


Fig. 1 - Le modèle Kolmogorov 41

D'autre part, une étude justifiant l'analyse bispectrale par l'apparition de couplages quadratiques dans les équations fondamentales de la mécanique des fluides a déjà été réalisée par Grésillon *et al.* [2, 3] et permet d'espérer, bien que les justifications théoriques manquent encore, qu'une telle étude sur la vorticité puisse amener des résultats nouveaux.

2.2 Dynamique de la vorticité

La variable que nous considérons est la vorticité de l'écoulement $\boldsymbol{\Omega}$ définie par $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \wedge \boldsymbol{v}$ où $\boldsymbol{v}$ est la vitesse locale de l'écoulement. D'après la loi de Navier-Stokes d'évolution de la vorticité dans un écoulement :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} = \nabla \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{\Omega}) + \rho \Delta \boldsymbol{\Omega} \Leftrightarrow \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega}\nabla)\boldsymbol{v} + \rho\Delta\boldsymbol{\Omega} \Leftrightarrow \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \underbrace{(\boldsymbol{\Omega}\nabla)\boldsymbol{v}}_{(1)} + \underbrace{\rho\Delta\boldsymbol{\Omega}}_{(2)}$$

Le premier membre, $\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}$, est la dérivée dans la description lagrangienne de la vorticité $\boldsymbol{\Omega}$. Il s'agit donc de la variation de la vorticité considérée dans le référentiel lié au fluide.

Le premier terme du second membre, marqué (1), correspond au phénomène qui nous intéresse : l'étirement ou la déformation (repliement) des vortex sous l'effet des gradients de vitesse. Par exemple, par conservation du moment cinétique l'étirement des vortex sous l'effet des gradients de vitesse va diminuer leur rayon et ainsi permettre le transfert de l'énergie vers les petites échelles. Nous allons donc développer ici une méthode pour observer ces changements d'échelle et voir de quelle façon les vortex réduisent leur taille caractéristique. Une telle réduction des dimensions spatiales se traduit par un élargissement de la distribution des vecteurs d'onde (espace des $\boldsymbol{q}$). Nous voyons là une relation directe entre la taille caractéristique des structures étudiées, et le vecteur d'onde sélectionné par le choix de l'angle entre les transducteurs et de la fréquence du signal émis lors de la mise en place du montage expérimental.

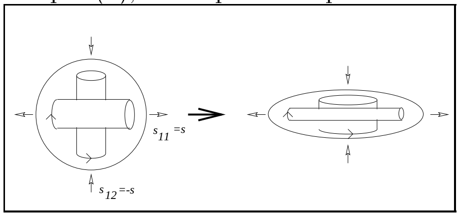


Fig. 2 - Étirement des vortex

Si nous appelons s_{ij} le tenseur de déformation $s_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ alors l'équation d'Euler peut s'écrire sous la forme $\frac{d\Omega_j}{dt} = \Omega_j s_{ij}$ si on néglige les dissipations d'énergie par frottement (viscosité $\rho = 0$). L'étirement du vortex s'interprète alors aisément [4] sur la cas simplifié en deux dimensions où $s_{11} = s_{22} = s$ et $s_{12} = 0$ pour des conditions initiales telles que $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$: $\frac{d\Omega_1}{dt} = s\Omega_1$ et $\frac{d\Omega_2}{dt} = -s\Omega_2$ d'où $\Omega_1 = \Omega e^{st}$, terme de divergence rapide de la vorticité qui décrit des évènements violents, et $\Omega_2 = \Omega e^{-st}$ illustrés sur la figure (2).

Le second terme du second membre, noté (2) dans l'équation, correspond à une dissipation de la vorticité caractérisée par la viscosité ρ.

2.3 Couplage ondes acoustiques/vortex

Lund *et al* [5] ont établi la relation suivante entre le rapport de la pression acoustique diffusée à la pression acoustique incidente à la fréquence ν_0 en fonction de l'angle de diffusion 2θ (voir figure (4) pour les notations utilisées) et la transformée de Fourier spatiale du champ de vorticité $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{q}, \nu - \nu_0)$:

$$\frac{P_{diffusée}(\nu)}{P_{incidente}(\nu_0)} = \pi^2 i \frac{-\cos(2\theta)}{1-\cos(2\theta)} \frac{\nu e^{i\nu D/c}}{c^2 D} (\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{r}) \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{q}, \nu - \nu_0)$$

où

$$\boldsymbol{q} = \frac{2\pi}{c}(\nu \boldsymbol{r} - \nu_0 \boldsymbol{n}) \simeq \frac{4\pi\nu_0}{c}\sin(\theta) \text{ si } \nu \simeq \nu_0$$

où $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{n}$ sont les vecteurs unitaires définissant respectivement la direction de l'onde incidente et la direction d'observation de l'onde diffusée, et D est la distance entre la zone de mesure et le récepteur. La valeur 2θ apparaît comme l'angle entre le signal émis (direction $\boldsymbol{r}$) et le signal diffusé (direction $\boldsymbol{n}$). Nous pouvons distinguer deux termes dans cette équation, l'un proportionnel à $\frac{\cos(2\theta)\sin(\theta)}{1-\cos(2\theta)}$, terme angulaire que nous aborderons plus tard, et le terme $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{q}, \nu - \nu_0)$ qui met en évidence la vorticité et le vecteur d'onde sélectionné $\boldsymbol{q}$ par le choix de la fréquence ν_0 de l'onde incidente. Ce terme s'interprète comme un filtre spatial sélectionnant une seule composante de la vorticité (choisie par l'orientation et le module de $\boldsymbol{q}$). L'hypothèse faite ici, valable en première approximation, est que l'onde acoustique émise pour observer les structures dans l'écoulement est monochromatique (fréquence unique de travail) et plane (vecteur d'onde spatial unique).

Nous pouvons dès maintenant remarquer l'existence d'une divergence du terme angulaire en $\theta \to 0$ ce qui nous permet de prédire un signal allant directement de l'émetteur au récepteur, sans passer par la zone de mesure (figure (8)), d'amplitude très importante.

L'avantage de l'utilisation d'ondes acoustiques plutôt qu'électromagnétiques est que nous avons là une large plage de fréquence sur laquelle nous pouvons sélectionner un signal cohérent sur une distance importante (contrairement à l'utilisation de l'optique où la seule source cohérente est le laser qui ne peut être ajusté que sur une faible plage de fréquence). De plus, nos détecteurs sont linéaires et nous fournissent donc directement une information sur la phase du signal diffusé (contrairement aux détecteurs en optique qui sont sensibles au carré du champ). Cette souplesse d'utilisation des signaux acoustiques rend l'installation du montage expérimental plus simple et laisse une plus grande liberté dans le choix des paramètres. Il nous a ainsi été possible de sélectionner des angles de diffusion suffisamment importants ($\theta_1 = 20^o$ et $\theta_2 = 30^o$ degrés) pour éviter un signal direct important qui aurait pu saturer les capteurs, et pour pouvoir obtenir des grands vecteurs d'onde sans avoir à travailler à des fréquences trop élevées (pour lesquelles des problèmes de propagation des ultrasons dans l'air seraient apparus).

Tout au cours de cet exposé nous noterons ω_i et ν_i respectivement la pulsation et la fréquence du signal émis ou reçu par la paire de transducteurs i. Nous appellerons θ_i, ou génériquement θ l'angle que fait la direction de propagation de l'onde incidente ou diffusée avec la normale à l'axe de propagation du flux. $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{k'}$ désigneront les vecteurs d'onde des signaux respectivement émis et reçus, et le vecteur d'onde observé est noté $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k'} - \boldsymbol{k}$ (voir figure (4)). Enfin c dénotera toujours la célérité du son supposée constante dans l'expérience.

3 Aspect pratique : description du montage expérimental

Plusieurs méthodes sont disponibles pour atteindre des informations sur la vorticité $\boldsymbol{\Omega}$ de l'écoulement. Nous avons défini $\boldsymbol{\Omega}$ comme le rotationnel de la vitesse $\boldsymbol{v}$. Une approche par le fil chaud nécessite donc 9 dispositifs pour pouvoir ainsi avoir les 9 dérivées partielles spatiales possibles (3 composantes de vitesse dérivées par rapport aux 3 coordonnées spatiales) permettant de déterminer la vorticité instantanée. Ces 9 données vont permettre de déduire la vorticité en différenciant le données obtenues par les fils orientés dans les diverses directions pour obtenir les différentes dérivées partielles nécessaires au calcul du rotationnel. Cette méthode est difficile à calibrer et à mettre en œuvre car il faut tenir compte des interactions entre les différents dispositifs à fil chaud qui doivent être proches les uns des autres. Il s'agit donc d'une technique locale et intrusive, deux caractéristiques désavantageuses dans le cadre de notre étude.

Une seconde méthode consiste à repérer la rotation d'objets sphériques dans l'écoulement. Une telle méthode a été appliquée en pratique en observant la réflexion d'un laser sur des billes transparentes de densité égale à celle du fluide dans lesquelles un miroir plan a été inséré. Là aussi des erreurs expérimentales s'introduisent aux trop petites échelles où le mouvement brusque des tourbillons ne peut être suivi par les billes du fait de leur inertie.

Le méthode adoptée dans cette étude consiste à envoyer une onde acoustique dans l'écoulement, et à observer le signal de pression diffusé selon une certaine direction. Ce vecteur d'onde est sélectionné en direction et en module (comme l'indique la formule de Lund vue auparavant) par l'orientation relative des transducteurs et la fréquence de l'onde incidente de la même façon qu'en diffusion de lumière (Rayleigh). Cette méthode a plusieurs avantages : elle ne perturbe pas l'écoulement et fournit une bonne résolution spectrale au détriment de la résolution spatiale (relation de type Heisenberg : $\Delta q \Delta L \sim 1$). Nous sommes intéressés dans la dimension des structures et non dans leur position, donc le passage par transformée de Fourier à l'espace des vecteurs d'onde est tout particulièrement avantageux pour nous, d'où le choix d'une méthode fondée sur la diffusion. Notre méthode est donc globale et non-intrusive, ayant l'avantage d'observer un grand volume. Une autre condition facilement vérifiable est que $|\boldsymbol{v}| \ll c$ i.e. que l'onde sonore est diffusée sur une échelle de temps durant laquelle les structures semblent gelées dans l'écoulement (rappelons que $|\boldsymbol{v}| \simeq 10m/s$ et $c \simeq 340m/s$). Notre choix de fréquence assure aussi que nous ne soyons pas dérangés dans nos mesures par le bruit acoustique de la turbulence qui se situe en dessous de 3 kHz : il nous serait impossible dans ces conditions de distinguer l'onde que nous avons émise du bruit propre de l'écoulement (d'où notre limitation de ne pas travailler sous 10 kHz qui nous empêche de voir des structures de très grandes dimensions).

Le flux d'air étudié est réalisé par un ventilateur centrifuge tournant à la vitesse de 60 ± 0.5 Hz dans un conduit de section carrée de 50 cm de côté. Après avoir été dévié par un coude à 90^o, l'écoulement est rendu laminaire par un nid d'abeilles et une grille de laminarisation placés en amont de la zone de mesure. Les structures sont alors créées par le rétrécissement de la section de la soufflerie par un buse circulaire de 5 cm de diamètre. Le jet ainsi formé est observé à 290 cm après la buse, distance suffisante pour pouvoir considérer que la turbulence est développée et homogène (la distribution de l'énergie sur une large plage de fréquences spatiales est une hypothèse fondamentale de la théorie de Kolmogorov 41 qui signifie qu'il n'existe pas d'échelle caractéristique dans l'écoulement turbulent ou autrement dit, qu'il y a suffisamment d'étapes entre la zone d'injection et la zone de dissipation dans la cascade illustrée figure (1) pour qu'une échelle donnée aie totalement perdu la mémoire des étapes précédentes). Après passage dans la zone de mesure, le flux d'air est à nouveau redirigé par deux coudes à 90^o pour finalement être réintroduit dans le cycle au niveau du ventilateur. Nous avons pris soin d'atteindre avant toute mesure un équilibre thermique pour être certain que les structures observées viennent bien de l'augmentation du nombre de Reynolds dû au rétrécissement de la section et non de fluctuations thermiques, sources de diffusion acoustique. La figure (3) présente la zone de mesure vue de la buse d'où est émis le jet. L'évacuation de l'air se fait par le conduit aprs le coude visible en haut à droite de l'image. Une telle construction permet d'atteindre des écoulements à des vitesses jusqu'à 10 m/s.

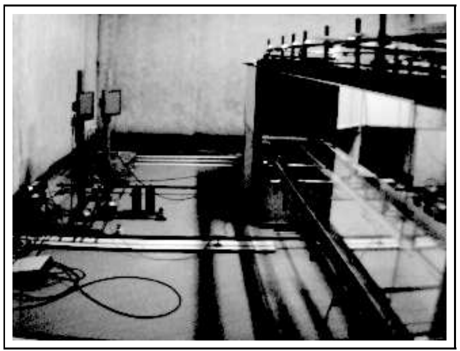


Fig. 3 - La soufflerie

Les émetteurs et les récepteurs sont des transducteurs électroacoustiques de

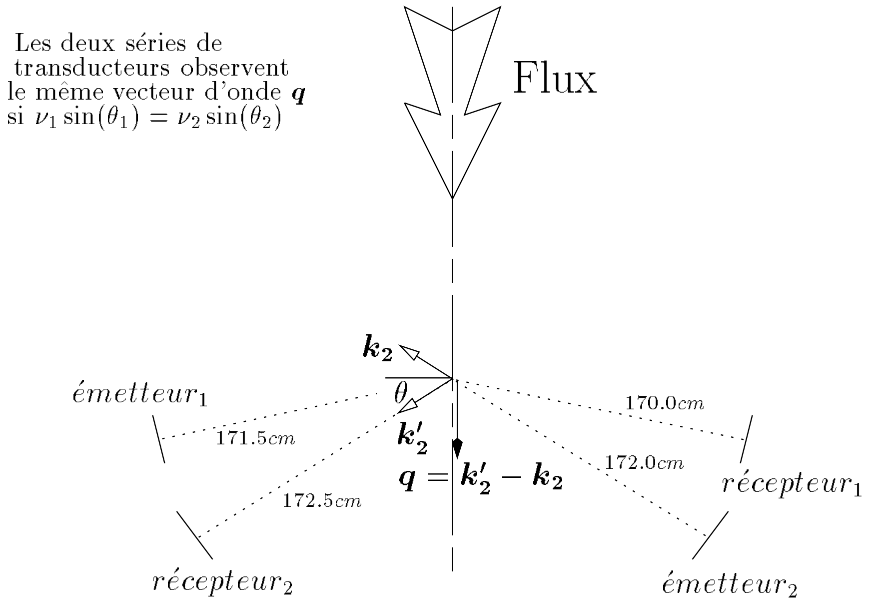


FIG. 4 - *Conventions*

type Sell réversibles [6] : une fine feuille de Mylar métallisée de $12\mu m$ d'épaisseur est tendue sur un conducteur fixe formé d'une plaque de zinc photo-gravée. Des rainures de faible profondeur ($200\mu m$) espacées de $300\mu m$ sont obtenues par photogravure. Ces rainures ont pour but d'augmenter la fréquence de résonance mécanique de la membrane de Mylar en définissant des conditions aux limites plus rapprochées. En effet, le principe de fonctionnement du transducteur Sell est de mesurer les variations de la capacité du condensateur formé par les deux surfaces conductrices constituées de Mylar métallisé sur la face extérieure et de zinc : nous avons là un condensateur à une armature mobile (la feuille de Mylar métallisée) et une fixe (plaque de zinc), dont le principe repose sur le fait que les variations de pression engendrées par l'onde acoustique vont déplacer la membrane de faible inertie (ce qui permet d'atteindre des hautes fréquences) et puisque nous sommes à tension de polarisation constante, des charges mobiles vont être créées sur chaque armature. Ces charges électriques sont alors amplifiées par un amplificateur de charges à très faible bruit (Amptek A250). Le signal en tension obtenu est filtré par un filtre passe bande entre 10 et 100 kHz avant d'être mesuré par le module d'acquisition Hewlett-Packard 3565.

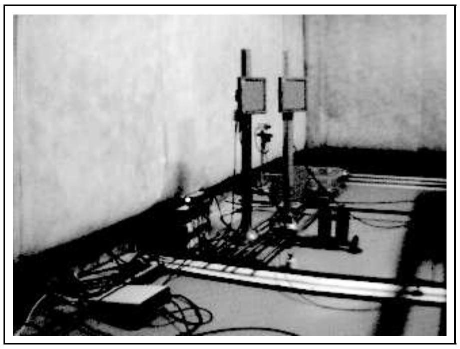


Fig. 5 - Les capteurs

La faible épaisseur de la membrane de Mylar permet de réaliser une large bande de fréquence où l'efficacité de la réponse au signal d'excitation reste constante (incluant largement l'intervalle 5 à 100 kHz dans lequel nous avons travaillé du fait des limitations des instruments d'acquisitions).

L'émetteur est polarisé par une tension continue de 400 V (pour assurer la linéarité à l'émission du transducteur), à laquelle est superposé le signal sinusoïdal à

la fréquence ν_0 de l'onde acoustique incidente que nous voulons envoyer. Lors du fonctionnement en récepteur, la tension de polarisation continue assure la sensibilité de la membrane aux variations de pression venant de l'onde acoustique à détecter, provoquant un mouvement de la feuille de Mylar et donc une variation de la capacité.
Ces transducteurs ont l'avantage de pouvoir être de grandes dimensions (jusqu'à $50 \times 30cm$) et donc très directifs (faible diffraction), et d'avoir une réponse en fréquence pratiquement constante ($\pm 6dB$ dans $[10; 100]kHz$) sur toute la plage qui nous intéresse. Dans notre cas les transducteurs utilisés lors des mesures étaient carrés de 15 cm de côté.

Trois générateurs de fonction sont synchronisés sur une horloge à 10 MHz avec le système d'échantillonnage. Tous les appareils possèdent donc une même base de temps, condition nécessaire comme nous le verrons plus tard pour pouvoir effectuer la démodulation des signaux reçus. Les signaux envoyés aux transducteurs sont générés par deux 3324A utilisés pour émettre une tension sinusoïdale entre 7 et 95 kHz. Les signaux enregistrés et les commandes sont envoyés à un module d'acquisition de données comprenant deux 35652B utilisés pour les acquisitions jusqu'à 102 kHz, deux 35652A autorisant des acquisitions jusqu'à 50 kHz, et enfin une source 35653A générant des signaux de fréquence inférieure à 50 kHz (ces deux derniers modules n'ont été utilisés que lors des acquisitions de signaux pour les bispectres où trois voies étaient nécessaires).

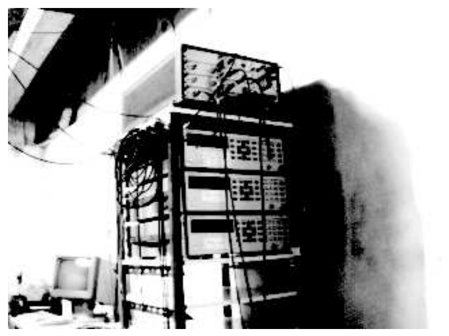


Fig. 6 - Instruments d'acquisition

Nous avons toujours, du fait du mode d'acquisition, couplé un générateur de fonction avec un module d'entrée. En effet, lors de l'acquisition des données, le signal reçu est multiplié par le signal émis de façon à recentrer le spectre : $\cos(\omega_{émis})\cos(\omega_{recu})$ produit $\cos(\omega_{émis} \pm \omega_{recu})$ et un filtrage passe-bas adéquat ne conserve que la partie du spectre centrée sur 0 (détection hétérodyne numérique, figure (7)).

4 Analyse spectrale

4.1 Forme d'un signal de diffusion

Les spectres[1] de puissance observés comportent deux pics caractéristiques : un pique fin et élevé au centre du spectre qui vient du signal direct entre l'émetteur et le récepteur, et un pic large et moins élevé qui provient du signal diffusé par les vortex entraînés dans l'écoulement. Ce second pic est décalé en fréquence du fait de l'effet Doppler introduit par la vitesse moyenne de l'écoulement. C'est ce second pic qui nous intéresse alors que le premier pic doit être considéré comme une nuisance dans notre étude. Dans la suite de cet exposé nous présenterons toujours des spectres démodulés, donc centrés sur 0 et tout décalage viendra par effet Doppler de l'interaction de l'onde incidente avec l'écoulement. Les fréquences utilisées dans les signaux acoustiques ne seront jamais visibles directement sur les spectres (si

1. la transformée de Fourier est en fait double, dans l'espace tout d'abord par la diffusion par les vortex, puis dans le temps par notre traitement des données:

$$s_{labo}(x,t) = s_{fluide}(x,t) * \delta(x - v_{moyen}t) \rightarrow s_{labo}(q,t) = s_{fluide}(q,t) \times e^{-iqv_{moyen}t} \rightarrow s_{labo}(q,\nu) = s_{fluide}(q,\nu) * \delta(\nu - qv_{moyen})$$

Ceci justifie la présence du décalage Doppler qv_{moyen} du signal obtenu.

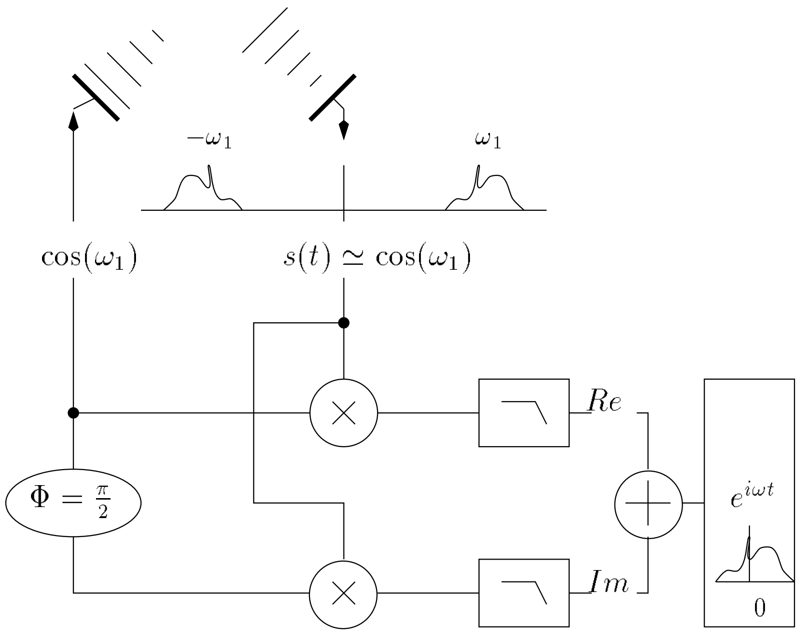


FIG. 7 - *Acquisition*

ce n'est à travers la valeur du décalage introduit par effet Doppler). Ainsi, nous pouvons directement lire des informations sur les spectres ne portant que sur le flux et non sur l'onde incidente.

4.2 Étude de la corrélation du signal

L'utilisation de deux ensembles émetteurs/capteurs distincts pour observer un même vecteur d'onde nous oblige à vérifier qu'il est bien possible dans le cas de deux configurations différentes, avec des signaux émis à des pulsations différentes, de sélectionner des phénomènes caractérisés par un même vecteur d'onde.

La détection se fait par diffusion d'ondes acoustiques émises par des transducteurs supposés seulement en première approximation directionnels [7, 8, 5]. Il faut donc tenir compte de la puissance diffusée en fonction de l'angle de diffusion (i.e. l'angle entre la direction d'émission et de réception, non constant du fait des lobes de diffraction). Nous avons vu auparavant dans l'équation établie par Lund que le terme dépendant de l'angle introduit une divergence de l'amplitude du signal lorsque $\theta \to 0$. Le premier objectif de notre étude sera de montrer qu'aucune corrélation n'existe entre les signaux directs observés par deux paires de transducteurs distinctes (ceci étant possible car les signaux directs ne traversent pas la même zone de mesure). Une fois établi le fait que nous pouvons éliminer le signal direct pour ne garder que le signal intéressant provenant de la diffusion de l'onde acoustique par les vortex, nous considérons une étude bispec-

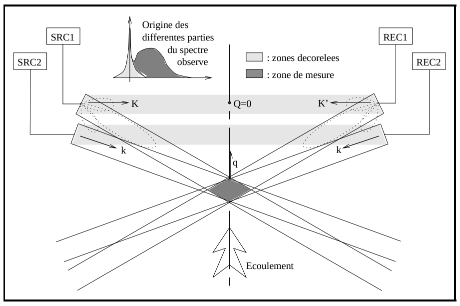


Fig. 8 - Origine des signaux observés

trale des signaux recueillis afin de déterminer quelle fraction de l'énergie des vortex vient, à une échelle donnée, d'une descente dans la cascade des échelles comparée aux structures naturellement présentes à cette échelle dans le flux. La figure (8) montre l'origine des différentes parties du spectre observé : une pic fin et élevé vient des signaux directs entre les paires de transducteurs (schématisés par les bandes claires) émis dans les lobes de diffraction. Ce signal est caractérisé par des vecteurs d'onde identiques $\boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{K'}$ dont la différence $\boldsymbol{Q}$ s'annule : il n'y a pas là de sélection de vecteur d'onde caractéristique d'une échelle de structures dans l'écoulement. De plus, les zones observées sont dissociées spatialement, on peut donc attendre une absence de corrélation des signaux de diffusion. D'autre part, nous voyons d'où vient la partie du spectre décalée vers les fréquence positives : un terme de diffusion selon des angles $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{k'}$ dont la différence donne un vecteur d'onde $\boldsymbol{q}$ de diffusion caractéristique de l'échelle spatiale analysée. Les fréquence ν_1 et ν_2 sont choisies de façon à ce que les deux couples de transducteurs observent le même vecteur d'onde $\boldsymbol{q}$: la diffusion se comporte là comme un filtre caractérisé par $|\boldsymbol{q}| = \nu \sin(\theta)$ (les paramètres sont donc ν et θ choisis lors de la mise en place du montage expérimental). Notre premier objectif a été de vérifier la loi de Lund (citée précédemment), i.e. que nous sélectionnons bien un même vecteur d'onde par le choix des paramètres tels que $\nu \sin(\theta) = cst$.

L'interspectre est défini par $E[x(\omega_1)y^*(\omega_1)]$, $E()$ représentant l'espérence mathématique. Ainsi nous constatons que l'interspectre prend une valeur élevée si la différence des phases de x et de y s'annule de façon à ce que les éléments moyennés lors du calcul de l'espérence ne se compensent pas par une orientation aléatoire de la phase. Cette condition n'est vérifiée que si x et y traduisent un même phénomène, dans notre cas le passage d'un vortex dans la zone d'observation.

La figure (9) présente en haut à droite les deux spectres après avoir effectué la dérivée temporelle sur le signal démodulé (donc dans le temps propre de l'écoulement). Nous observons dans les deux cas une bosse centrée à environ 300 Hz, décalage s'interprétant comme venant de l'effet Doppler. Nous pouvons en déduire la vitesse moyenne du flux : $\Delta\omega = \boldsymbol{qv} = qv\sin(\theta) = 2\frac{\omega}{c}v\sin(\theta) \Rightarrow v = \frac{\Delta\omega}{\omega}\frac{2c}{\sin(\theta)}$ où q est le module du vecteur d'onde étudié et $\Delta\omega$ la variation de pulsation induite par le mouvement du fluide. L'application numérique donne $|\boldsymbol{v}| = \frac{\Delta\nu}{\nu}\frac{c}{2\sin(\theta)} = \frac{300}{20000}\frac{340}{2\sin(20)} = 7.5m/s$, où c est la célérité des ultrasons dans l'air. La largeur de cette bosse est intéressante en ce qu'elle nous informe sur la plage de variation de la vitesse de l'écoulement. En effet, cette partie du spectre est formée de la moyenne de nombreux pics obtenus en calculant la transformée de Fourier sur un petit nombre de points (256 ou 512) et en moyennant les spectres sur un grand nombre d'échantillons (512 dans notre cas). Chacun des ces spectres présente un maximum beaucoup plus élevé que la valeur observée finalement après avoir effectué la moyenne. Ceci est illustré sur la figure (10) où trois spectres instantanés sont présentés en même temps que le spectre obtenu après 8192 moyennes : il faut remarquer que le spectre moyen a été multiplié 200 fois pour être de taille comparable aux spectres instantanés, beaucoup plus fins et aigus. Nous verrons plus loin que le même phénomène apparaît lors du calcul du bispectre, et là cet effet est plus gênant car il oblige à utiliser beaucoup plus de points puisque la statistique est d'ordre plus élevée (3 au lieu de 2) et donc la variance de l'estimateur plus grande.

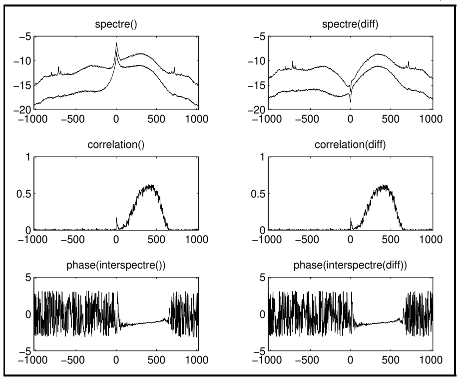


Fig. 9 - Spectres observés

Si le second pic observé dans les deux spectres est associé à la diffusion du son par une même structure, nous pouvons attendre une corrélation importante et par conséquent il semble judicieux de calculer l'interspectre des deux signaux émis à ν_1 et ν_2 et détectés sous deux angles de diffusion différents $2\theta_1$ et $2\theta_2$ sur les deux voies séparées mais réglées de façon à observer un même vecteur d'onde ($\nu_1 \sin(\theta_1) = \nu_2 \sin(\theta_2)$). Théoriquement, le pic central n'a aucune raison de contenir une cohérence (définie comme $\frac{|E(x(\omega)y^*(\omega))|^2}{\sqrt{E(x(\omega)^2)(y(\omega)^2)}}$) importante puisque la condition de faire croiser les faisceaux dans une même zone de mesure implique que les signaux directs allant de l'émetteur au récepteur sans avoir rencontré une zone de mesure commune sont des lobes de diffraction sans corrélation entre les deux voies (voir figure (8)).

Nous avons donc évalué l'interspectre $E[x(\omega_1)y^*(\omega_1)]$. Nous avons observé un pic de corrélation (définie comme l'interspectre normalisé) proche de la zone où se recouvrent les deux pics provenant du Doppler dans chacun des signaux, associé à une phase presque constante. Au contraire, les pics centraux directs provenant des lobes de diffraction étaient placés au niveau d'une zone où la cohérence est faible et la phase aléatoire. Ces résultats laissent donc penser que nous avons bien mesuré un phénomène de diffusion des ondes acoustiques par le flux. Ce résultat est confirmé lors du calcul de l'interspectre de la dérivée des signaux. En effet, la dérivée se comporte comme un filtre passe-haut dans l'espace fréquentiel [2] et permet ainsi d'éliminer le pic direct important basse fréquence. Le choix de l'opération de dérivation sur les signaux temporels vient d'une étude de la formule de Lund : nous pouvons réécrire le terme angulaire [3] comme $\frac{1}{|\boldsymbol{q}|}$ et nous obtenons alors $\frac{P_{diffusée}}{P_{incidente}} \propto \frac{1}{|\boldsymbol{q}|}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{q},\nu)$ qui s'interprète comme la transformée de Fourier de la primitive de la vorticité en termes de variables spatiales. En fait nous pouvons effectuer une dérivée temporelle car dans l'hypothèse de Taylor (turbulence gelée) où $x = \langle v \rangle t$, $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\langle v \rangle \partial t}$ donc cette dérivation va nous permettre de directement observer la vorticité de l'écoulement (la dérivée est effectuée sur le signal démodulé donc par rapport au temps propre de l'écoulement).

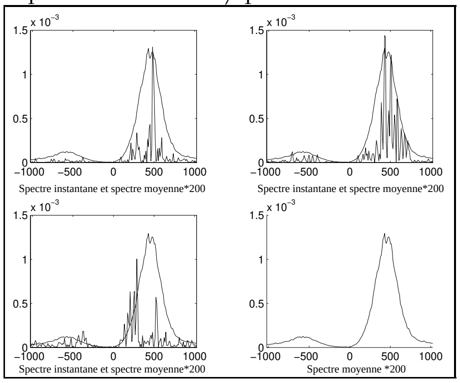


Fig. 10 - Spectres instantanés

Les deux interspectres calculés avec ou sans la dérivation (i.e. avec ou sans pic central) sont identiques, ce qui confirme que le signal direct n'apporte aucune contribution à la cohérence car il ne correspond pas à des fluctuations hydrodynamiques au vecteur d'onde sélectionné (pas de sélection de vecteur d'onde ni de volume de mesure commun aux deux séries de transducteurs pour les signaux directs).

Enfin, nous avons pu vérifier que la valeur numérique obtenue de la corrélation ainsi que la zone où la phase est constante ont bien un sens physique puisqu'en brisant la synchronisation du fichier (par retournement temporel avec conjugaison de phase, translation d'une série temporelle par rapport à l'autre ou en rendant la phase de la transformée de Fourier aléatoire) nous perdons totalement cette zone où les deux signaux présentent un différence de phase stationnaire et observons une chute de la cohérence qui traduit la perte de la corrélation entre les deux fichiers.

2. la dérivée s'exprime sur des signaux discrets par $x(t+1) - x(t) = x(t) * (\delta(1) - \delta(0))$ $\xrightarrow{Fourier}$ $X(\nu)(e^{2i\pi\nu\tau} - 1) = X(\nu)e^{i\pi\nu\tau}2i \times \sin(\pi\nu\tau)$ qui s'annule en 0 et se comporte comme un filtre passe-haut fréquentiel

3. $\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(2\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{2\sin(\theta)^2} = \frac{1}{2\sin(\theta)} \propto \frac{1}{|\boldsymbol{q}|}$

4.3 Variation du maximum de corrélation avec la réduction du volume de la zone de mesure

Après avoir validé la possibilité d'observer un même vecteur d'onde selon deux configurations différentes en ajustant les couples $(fréquence\ \nu, angle\ \theta)$ $(\nu_1 \sin(\theta_1) = \nu_2 \sin(\theta_2))$ des signaux, nous avons testé la robustesse de la méthode vis à vis des positions relatives des deux zones de mesure définies par l'intersection des faisceaux acoustiques, ainsi que vis à vis des déviations de la colinéarité entre les deux vecteurs d'onde.

La réduction du volume étudié se fait en translatant une des paires de transducteurs parallèlement au flux. La zone de mesure faisant environ 16 cm de long dans la direction de l'écoulement (pour environ 40 cm dans la direction transversale à l'écoulement), nous avons translaté une paire de capteurs d'une distance d de +20 cm à -12 cm par rapport à une position de recouvrement maximum des zones de mesure. Une décroissance rapide de la corrélation a été observée avec la diminution du volume d'intersection des quatre faisceaux d'ultrasons, chaque paire de faisceaux définissant sa propre zone de mesure (le maximum situé à -2 cm est justifié plus loin). De plus, la figure (11) permet de constater une autre modification portant sur la phase de la fonction de corrélation. Alors que dans la figure (9) une pente de la phase dans la zone où les signaux sont corrélés est nettement visible, il est possible en translatant les capteurs de réduire, annuler puis inverser cette pente. En fait, la pente de la phase traduit une différence de marche *(émetteur, zone de mesure, capteur)* provenant de l'imperfection de la symétrie de notre montage. Une différence de marche d'environ 5.5 cm a été mesurée directement pour la position $d = 0$. La figure (11) a été obtenue en approchant les deux séries de transducteurs de $d = 5cm$.

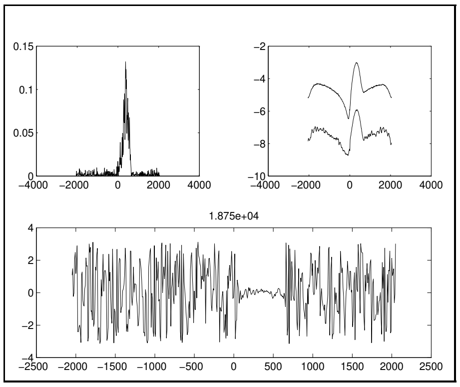


Fig. 11 - Ajustement de la translation d pour compenser la différence de chemins acoustiques

Le calcul de la différence de marche après avoir mesuré la pente de la phase se fait de la façon suivante[4] : si p est la pente de la phase, alors la différence de chemin entre les deux faisceaux est $\Delta l = \frac{p}{2\pi} c$. Avec la valeur de $p = 1.3.10^{-3} rad/Hz$ observée sur la figure (9), nous obtenons $\Delta l = 7.0cm$, valeur raisonnable compte tenu de l'imprécision sur l'évaluation de la pente. Nous constatons bien sur la figure (11) que le maximum de corrélation correspond à une annulation de la pente de la phase. Ceci signifie que pour cette valeur du rapprochement des deux capteurs nous avons annulé la différence de marche entre les deux faisceaux émis du centre des transducteurs et que la zone de mesure observée est maximale (contact acoustique par analogie avec le contact optique de l'interféromètre de Michelson).

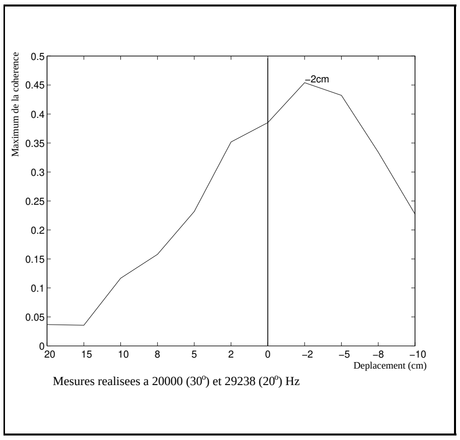


Fig. 12 - Maximum de la cohérence en fonction de la translation d

4. la phase ψ vient d'un terme en $\psi = \omega \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta\psi}{\Delta\nu} = 2\pi\Delta t$ d'où nous déduisons la différence de chemin acoustique $\Delta l = c\Delta t = \frac{\Delta\psi}{\Delta\nu}\frac{c}{2\pi}$

La figure (12) présente la variation du maximum de la cohérence en fonction de la distance dont ont été translatés les transducteurs. La décroissance de ce maximum avec la réduction de la zone de mesure est aisément observable. De plus, nous constatons bien que le maximum se situe là où les transducteurs ont été rapprochés (valeurs négatives des translations sur le schéma) d'entre 2 et 5 cm. En fait une étude plus poussée du maximum de corrélation en fonction de la distance des zones de mesure définies par l'intersection des deux faisceaux de chaque paire de transducteurs doit permettre de réintroduire une dépendance spatiale (que nous avons perdu lors de la transformée de Fourier $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{q}$) et d'en déduire des informations sur la cohérence spatiale des diffuseurs (en application du théorème de Zernike-Van Cittert qui énonce que la variation spatiale du contraste des franges est la transformée de Fourier de la cohérence spatiale de la source).

Nous avons ensuite tourné une paire de capteurs sur eux même de façon à ce que les deux vecteurs d'onde pour chaque paire de capteurs ne soient plus exactement colinéaires. Le module du vecteur d'onde a lui été conservé puisque la rotation s'est faite en maintenant l'angle de diffusion. Nous observons alors une décroissance linéaire du maximum de corrélation, par exemple à 20 kHz les valeurs vont de 0.234 pour des angles $\theta = \{21^o, 19^o\}$ à 0.017 pour des angles $\theta = \{28^o, 12^o\}$.

4.4 Variation du maximum de corrélation avec la variation des vecteurs d'onde considérés

Divers autres tests ont été appliqués pour confirmer que nous sélectionnions bien une échelle unique de structures par le choix des fréquences des signaux émis et des angles entre signaux incidents et reçus, définissant ainsi le pouvoir de résolution de notre montage. Nous avons tout d'abord tenté d'écarter les deux vecteurs d'onde en sélectionnant une des fréquences du système et en balayant un plage de $\pm 6000 Hz$ autour de la fréquence qui nous permettrait de sélectionner le même vecteur d'onde sur la deuxième voie. Dans tous les cas nous obtenons un maximum de la corrélation pour un écart nul à la valeur correspondant à la sélection de deux vecteurs d'onde identiques, et une décroissance rapide en dehors de cette condition (figure (13)).

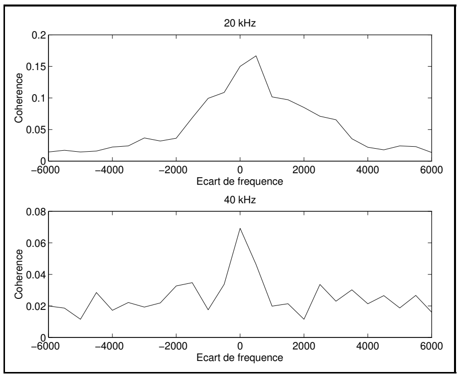


Fig. 13 - Cohérence entre signaux associés à des vecteurs d'onde de diffusion

Une autre idée que nous avons voulu tester est la possibilité de créer artificiellement des structures de vorticité (tourbillons de Von Karman) dans le jet en introduisant un obstacle en amont de la zone d'observation. La figure (14) présente le maximum de corrélation pour un balayage de la fréquence la plus basse sur une plage allant de $10kHz$ à $50kHz$. Les deux courbes ont été obtenues dans un cas sans obstacle et dans le second cas avec un barreau de $2mm$ de diamètre en travers de l'écoulement. Nous n'observons pas de déviation significative entre les deux résultats. Vraisemblablement, les obstacles mis en place ne créaient pas des structures de dimensions observables aux vecteurs d'onde choisis. Dans tous les cas, ces courbes sont intéressantes dans la mesure où elles donnent une idée de la vitesse de chute de la corrélation avec le vecteur d'onde (la fréquence du signal émis) sélectionné, et montre que nous perdons beaucoup de la qualité de notre étude aux fréquences élevées. Ceci peut s'interpréter comme une plus grande sensibilité aux variations de la phase lorsque nous augmentons la fréquence (i.e. que nous faisons varier la phase plus rapidement). Un phénomène que nous n'avons pas pris en compte et qui peut causer cette variation aléatoire de la phase est la passage au travers de la zone limite du jet où même une faible variation de la célérité du son sera détectée par une modification de la phase, d'autant plus importante que nous nous plaçons à haute fréquence. Cet effet pourrait être diminué en utilisant des guides d'onde pour limiter les perturbations des faisceaux acoustiques dans leur propagation avant et après la zone de mesure. Toutes les études suivantes se sont faites pour une fréquence basse inférieure à $30kHz$.

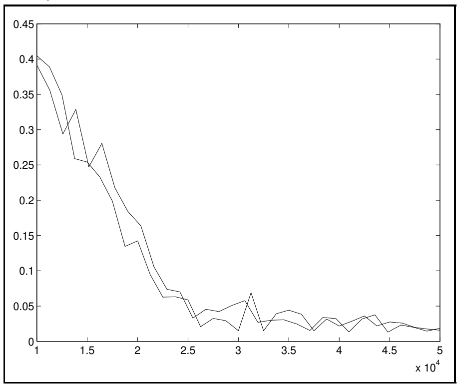


Fig. 14 - Variation de la cohérence avec la fréquence en présence d'obstacles

5 Analyse bispectrale

5.1 Principe

Le spectre de puissance d'un signal $P(\omega)d\omega = E(x(\omega)x^*(\omega))d\omega$ informe sur la quantité d'énergie contenue dans les composantes du signal dont les fréquences sont comprises entre $[\omega, \omega + d\omega]$. Il s'agit de la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation temporelle $P(\omega) = TF(\langle x(t)x(t+\tau)\rangle_t)$ (ω est la varibale conjuguée du retard τ) ; en vertue du théorème de Bessel-Perceval, $E(x^2(t)) = \sum_\omega P(\omega)$, $P(\omega)d\omega$ mesure la contribution des composantes de pulsations voisines de ω au moment d'ordre 2 $\langle x^2 \rangle$.

En turbulence 3D, l'analyse des densités de probabilité des incréments de vitesse (gradients de vitesse) révèle dans la zone inertielle des déviations par rapport à un comportement gaussien. Le comportement non-gaussien se traduit par une skewness (moment d'ordre 3) significativement non nulle (et toujours négative) associée à une direction privilégiée du flux d'énergie (des grandes échelles vers les petites). Nous pouvons alors étendre la même démarche [9] à l'ordre 3 en étudiant le bispectre qui est la transformée de Fourier de la fonction de bicorrélation : $B(\omega_1, \omega_2) = TF(x(t)x(t+\tau_1)x(t+\tau_2))$ (ω_i étant alors la variable conjuguée de τ_i). En terme d'énergie, $B(\omega_1, \omega_2)d\omega_1 d\omega_2$ mesure la contribution au moment d'ordre 3 (plus précisément au cumulant d'ordre 3) du couplage quadratique entre les intervalles fréquentiels $[\omega_1, \omega_1 + d\omega_1]$ et $[\omega_2, \omega_2 + d\omega_2]$: $E(x^3(t)) = \sum_{\omega_1,\omega_2} B(\omega_1, \omega_2)$.

En fait plutôt que d'utiliser le bispectre nous utiliserons la bicohérence définie comme le bispectre normalisé (de la même façon que la cohérence est l'interspectre normalisé) :

$$C_{xy} = \frac{|\langle X(\omega_1)Y(\omega_2)Z^*(\omega_3)\rangle|}{(\langle|X(\omega_1)Y(\omega_2)|^2\rangle\langle|Z(\omega_3)|\rangle^2)^{1/2}}$$

Donc si nous considérons trois signaux de pulsations ω_1, ω_2 et $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, nous pouvons connaître quelle part de l'énergie de ω_3 vient d'un mode propre et quelle part vient d'un couplage entre ω_1 et ω_2. Le couplage quadratique peut créer ω_3 par $(\cos(\omega_1) + \cos(\omega_2))^2$.

Si l'énergie du signal de pulsation ω_3 vient d'un phénomène aléatoire, la phase de ce signal variera de façon aléatoire et la moyenne de $X(\omega_1)Y(\omega_2)Z^*(\omega_3)$ s'annule et C_{xy} sera très faible. Si au contraire le phénomène de pulsation ω_3 vient d'un couplage quadratique de ω_1 et ω_2 alors la phase de $X(\omega_1)Y(\omega_2)Z^*(\omega_3)$ sera stationnaire et les contributions à la moyenne vont se sommer pour donner une valeur non nulle de la bicohérence de C_{xy}.

La justification de l'analyse bispectrale des turbulences dans un écoulement a été donnée par Grésillon *et al*[5] dans le cas de la vitesse $\boldsymbol{v}$. Cette démonstration n'a pas encore pu être étendue à la vorticité $\nabla \wedge \boldsymbol{v}$. Nous pouvons voir apparaître naturellement le terme de couplage non-linéaire quadratique par transformée de Fourier de l'équation de Navier-Stokes.

5.2 Résultats

S'il existe un cascade turbulente comme le prévoit la théorie de Kolmogorov 41, le passage des grandes échelles aux petites échelles se fait grâce aux termes non linéaires dans l'équation de Navier-Stokes, dont nous avons vu qu'ils sont quadratiques. Nous cherchons donc à évaluer le bispectre fonction de deux paramètres, sélectionnés lors de la mise en place du montage expérimental, $\boldsymbol{q_1}$ et $\boldsymbol{q_2}$ (les deux échelles observées) et de deux variables, ω_1 et ω_2. Il s'agit donc d'évaluer les interactions dans le temps entre deux échelles caractérisées par le rapport de leurs tailles caractéristiques $\frac{|\boldsymbol{q_1}|}{|\boldsymbol{q_2}|}$. Nous pouvons nous attendre à ce que les temps caractéristiques des structures soient liés à la dynamique de l'écoulement à une certaine échelle et donc à leur taille caractéristique. Pour que les vortex aient la possibilité d'interagir il faut qu'ils aient des temps caractéristiques du même ordre de grandeur d'où notre choix dans la sélection de $\boldsymbol{q_1}$ et $\boldsymbol{q_2}$ d'un rapport $\frac{|\boldsymbol{q_1}|}{|\boldsymbol{q_2}|}$ proche de 1 (caractère local de la turbulence). Les valeurs utilisées ont été 1, 1.1 et 1.3, et $|\boldsymbol{q_1}| \simeq 370m^{-1}$ ($\nu_1 = 20kHz$ et $\theta_1 = 20^o$). Ce choix nous permet donc de nous assurer qu'il y aura interaction entre les structures observées par les deux premières voies $\boldsymbol{q_1}$ et $\boldsymbol{q_2}$ pour donner des objets de taille caractéristique observables par un vecteur d'onde $\boldsymbol{q_1} + \boldsymbol{q_2}$. Le troisième vecteur d'onde vérifie alors la condition $\nu_1 \sin(\theta_1) + \nu_2 \sin(\theta_2) = \nu_3 sin(\theta_1)$ qui se comprend plus intuitivement par la décomposition : $\boldsymbol{q_3} = \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2$ (le dernier angle est aussi θ_1 car nous utilisons le même émetteur à ultrasons pour ν_1 et ν_3). Il a été nécessaire d'utiliser deux voies pour ne pas être gêné par la non-linéarité intrinsèque du fonctionnement des transducteurs. En effet, lorsque nous voulons observer l'interaction de deux vecteurs d'onde identiques (donc le triplet $(\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_3} = 2\boldsymbol{q_1})$), il faut recevoir une des fréquences permettant d'obtenir $\boldsymbol{q_1}$ sur un récepteur, et ν_1 et ν_2 sur un second récepteur pour ne pas observer $2\nu_1$ venant d'un couplage quadratique de deux signaux donnant $\boldsymbol{q_1}$ sur un même transducteur. La possibilité d'avoir deux angles différents entre deux paires de transducteurs, et donc deux fréquences différentes pour obtenir un même

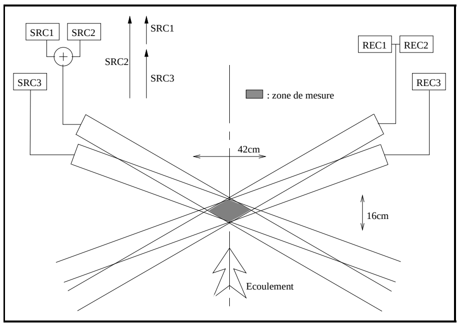


Fig. 15 - Mesure du bispectre

5. la démonstration sur la vitesse se fait de la façon suivante : par transformée de Fourier de l'équation de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}.\nabla)\boldsymbol{v} = O(\frac{1}{R_e}) \rightarrow \omega \boldsymbol{v}(\omega, \boldsymbol{k}) - \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega' dk'^3 \times (\boldsymbol{k'}.\boldsymbol{v}(\omega - \omega', \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k'}))\boldsymbol{v}(\omega', \boldsymbol{k'}) = O(\frac{1}{R_e})$$

où R_e est le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement. Puis en multipliant par le conjugué de la vitesse pour obtenir une énergie nous faisons naturellement apparaître le bispectre :

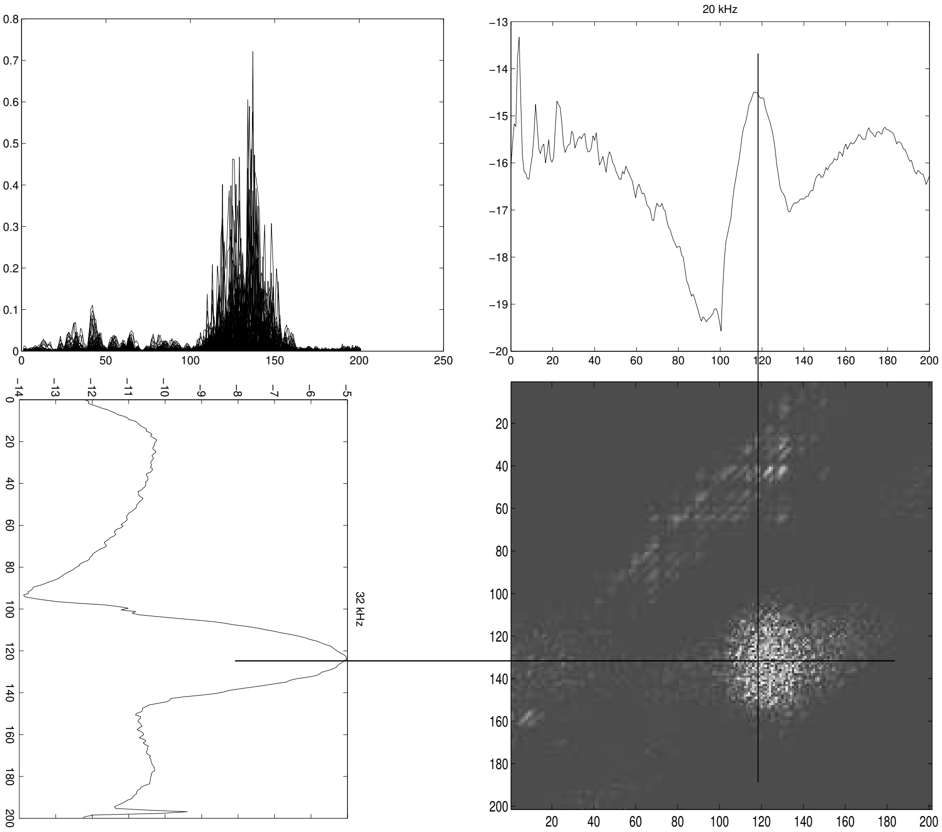
$$\langle |\boldsymbol{v}(\omega, \boldsymbol{k})|^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega' dk'^3 \times \langle \boldsymbol{v}(\omega - \omega', \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k'})\boldsymbol{v}(\omega', \boldsymbol{k'})\boldsymbol{v}^*(\omega, \boldsymbol{k}) \rangle + O(\frac{1}{R_e})$$

Nous voyons apparaître la condition $\boldsymbol{k_3} = \boldsymbol{k_1} + \boldsymbol{k_2}$ et $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ en définissant $\omega_1 = \omega - \omega'$, $\omega_2 = \omega'$ et $\omega_3 = \omega$

$\boldsymbol{q_1}$ élimine ce problème qui augmenterait la cohérence (en ajoutant au signal à ν_2 une contribution venant du carré de ν_1 exactement corrélée au signal à ν_1) de façon artificielle. Le but de notre première étude a justement été de vérifier dans cette optique qu'un même $\boldsymbol{q_1}$ pouvait être obtenu par deux configurations différentes.

Les résultats obtenus mettent en évidence que le phénomène observé est bien celui du passage d'énergie entre diverses échelles par interactions quadratiques. Les maxima de corrélation atteignent, dans certains cas, des taux allant jusqu'à 0.8 sur une bicohérence instantanée (dont la signification reste à être précisée). Après moyennage sur un grand nombre d'échantillons, la bicohérence se stabilise autour de valeurs significativement non nulles autour de 10^{-2}. Le maximum se situe bien au niveau de la position de la bosse dans le spectre dûe au Doppler. Ceci signifie que la corrélation vient de l'interaction de trois échelles, sans que nous puissions pour l'instant donner d'intervalle de confiance. La valeur élevée est pertinente car en retournant les signaux et en conjuguant la phase (retournement temporel du signal en gardant le spectre de puissance) les maxima de corrélation chutent d'un facteur 10 à 150.

L'étude systématique de la variance de la bicohérence fera l'objet d'une étude ultérieure. Cependant, nous pouvons retenir le résultat suivant : $var(B(\omega_1, \omega_2)) \sim \frac{1}{P(\omega_1)P(\omega_2)}$ où B est la bicohérence et P les spectres. Ainsi, nous constatons que la variance d'estimation de la bicohérence est conditionnée par l'amplitude des spectres (plus les spectres sont élevés, plus la variance de la bicohérence est faible). Cette remarque permet de considérer que les valeurs obtenues pour les expériences sont pertinentes. Par ailleurs, nous avons testé la validité de ces estimations en effectuant des transformations sur les signaux (retournement et conjugaison de phase des signaux temporels, translation des signaux temporels ou remplacement de la phase de la transformée de Fourier par une valeur aléatoire pour garder le spectre de puissance) dont les conséquences sont de faire baisser la bicohérence. Il apparaît donc que nous obtenons des valeurs significativement non nulles sans que nous puissions donner d'intervalle de confiance.



Les figures précédentes illustrent le calcul de la bicohérence pour l'ensemble de fréquences $\{20000, 32177, 41942\}$ Hz (qui vérifie donc la condition $20\sin(30) + 32.177\sin(20) = 41.942\sin(30)$ et $\frac{|\boldsymbol{q}_1|}{|\boldsymbol{q}_2|} = 1.1$). Les deux schémas à gauche et à droite sont les spectres du signal temporel différencié. Dans les deux cas la bosse dûe au Doppler est aisée à distinguer. En bas à droite, la bicohérence montre un maximum marqué au niveau de l'intersection des maxima des Doppler. Ceci prouve que les phénomènes observés sont bien des structures entraînées dans le flux. La figure en haut à gauche est une projection de la bicohérence : le pic est localisé, le maximum se situe au delà de 0.7. Pour comparaison, dans le cas du signal retourné et d'une phase rendue aléatoire, le maximum de la bicohérence est de 0.06.

Nous pouvons interpréter la position du maximum de bicohérence à partir des conditions de symétries et les équation vérifiées lors du calcul du bispectre. Nous avons trois conditions [9] :

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{\omega_3}{k_3} = |\boldsymbol{v}| & (\textit{hypothèse de Taylor/effet Doppler}) \\ \omega_3 = \omega_2 + \omega_1 & (\textit{condition de résonance temporelle}) \\ k_3 = k_2 + k_1 & (\textit{condition de résonance spatiale}) \end{array}\right.$$

La droite notée (d1) sur la figure (16) correspond à la première équation, $\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}$ qui dans ce cas où nous avons choisi $k_1 = k_2$ est la première bissectrice. Nous devons donc toujours trouver le maximum de la bicohérence sur la droite passant par l'origine et de pente $\frac{k_1}{k_2}$. La droite (d3) vient de la seconde équation, $\omega_2 + \omega_1 = \omega_3$

et puisque $\frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2} = v = \frac{\omega_3}{k_3}$ nous obtenons $\omega_2 = k_3 v - \omega_1 = \Delta\omega_3 - \omega_1$ ($v = |\boldsymbol{v}|$ et $\Delta\omega_3$ étant le décalage dû au Doppler sur ω_3). La troisième condition est illustrée sur la figure (15) en terme de somme vectorielle à laquelle nous avons associé les émetteurs utilisés dans le montage expérimental. Nous pouvons vérifier que cette dernière condition est bien vérifiée : cette mesure a été faites pour $\nu_1 = \nu_2 = 20kHz$ et donc $\nu_3 = 29238Hz$ soit un rapport des Doppler $\frac{\Delta\omega_3}{\Delta\omega_1} = \frac{\omega_3}{\omega_1}$. L'abscisse 100 correspond à un décalage Doppler nul pour ω_1. La distance entre les deux marqueurs sous l'axe des abscisse informe sur $\Delta\omega_1$. D'autre part $\Delta\omega_3$ est donné par la distance entre les deux droites (d2) et (d3) sur la figure. Ces mesures faites, nous constatons bien que le rapport $\frac{\Delta\omega_3}{\Delta\omega_1} \simeq 1.5 \simeq \frac{\omega_3}{\omega_1}$. Le résultat est bien en accord avec nos prédictions.

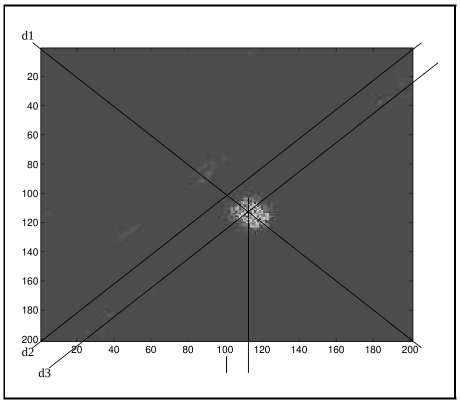


Fig. 16 - Interprétation du bispectre

Nous avons finalement voulu vérifier les résultats de Grésillon *et al* sur la décroissance de la cohérence avec le nombre d'échantillons. Une étude plus poussée sur un plus grand nombre de points a fait apparaître un phénomène déjà présent lors du calcul des spectres en première partie de cette étude : tous les maxima de bicohérence ne se situent pas exactement au même point. En moyennant les bicohérences obtenues sur un grand nombre de fichiers lors d'acquisitions successives dans des conditions similaires, nous constatons une chute brutale au début du maximum de la moyenne, puis une stabilisation autour de 2.10^{-3}. La fin de la décroissance se situe environ au $70^{ème}$ fichier (tous les fichiers contiennent depuis le début de l'étude le même nombre de points, 32 séries de 2048 points, soit 65536 acquisitions). Ceci signifie que toute la surface recouverte par les maxima des bispectres inclus dans la moyenne est balayée pour 35 fois plus de points qu'il n'en fallait pour obtenir un spectre reproduisible (la large bosse) lors des calculs d'interspectres (il faut 70 fichiers mais le facteur n'est que de 35 car les fichiers utilisés lors des calculs d'interspectres contenaient deux fois plus de points). Non seulement nous constatons bien qu'en augmentant le moment étudié la variance du signal croît rapidement et nécessite des acquisitions considérablement plus longues, mais nous obtenons là un ordre de grandeur du temps qu'il faut pour voir passer devant nos capteurs un ensemble de structures représentatif du phénomène qui nous intéresse. Enfin il n'est pas surprenant, avec ces considérations, de voir le maximum de 0.7 du bispectre instantané chuter à 2.10^{-3} après 100 moyennes. La décroissance semble se faire comme l'inverse du nombre de spectres moyennés avant de se stabiliser.

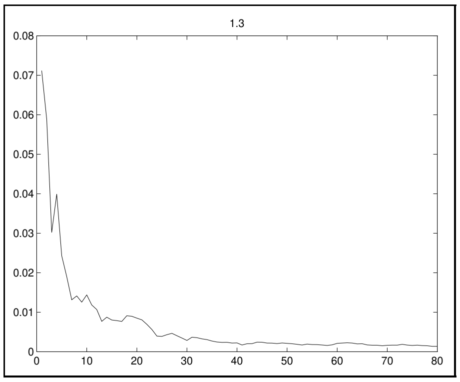


Fig. 17 - Chute du maximum de bicohérence avec le nombre de spectres moyennés

6 Conclusion

Nous avons tout d'abord pu vérifier que la sélection d'un même vecteur d'onde caractérisant l'échelle des structures observées dans l'écoulement par deux configurations différentes de paires de transducteurs est valable.

Puis nous avons constaté que le pic central observé provenant d'un signal direct entre l'émetteur et le capteur peut être retiré en effectuant une dérivée temporelle du signal. La cohérence n'est pas affectée par cette opération.

Enfin la pertinence de l'étude par le bispectre a été établie par l'obtention de maxima de la bicohérence faibles mais significativement non nuls positionnés aux emplacements prévus théoriquement. Cette méthode mérite d'être approfondie (évaluation quantitative de la variance et du biais des estimateurs de bispectre et de bicohérence).

Références

[1] Uriel Frisch. *Turbulence*. Cambridge University Press.

[2] D. Grésillon and M.S. Mohamed-Benkadda. Direct mode-mode coupling observation in the fluctuations of nonstationary transparent fluid. *Phys. Fluids*, July, 1988.

[3] Boa-Teh Chu and Leslie S. G. Kovásznay. Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas. 1957.

[4] Tennekes and Lumley. *A First Course in Turbulence*. The MIT Press.

[5] Ferando Lund and Cristián Rojas. Ultrasound as a probe of turbulence. *Physica D*, 37, 1989.

[6] Christophe Baudet. Habilitation à diriger les recherches. 1994-1995.

[7] Robert H. Kraichnan. The scattering of sound in a turbulent medium. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 25, 1953.

[8] C. Baudet, S. Ciliberto, and J.F. Pinton. Spectral analysis of the von kármán flow using ultrasound scattering. *Physical Review Letters*, July, 1991.

[9] Young C. Kim and Edward J. Powers. Digital bispectral analysis and its applications to nonlinear wave interactions. *IEEE Transactions on Plasma Science*, June, 1979.