Université Claude Bernard - Lyon 1
École normale supérieure de Lyon

Magistère des Sciences de la Matière - option Physique

Simulation d'une expérience de dynamo cinématique. Estimation du nombre de Reynolds critique.

Maxime CLUSEL

Stage de Licence effectué en juin et juillet 1999
au Laboratoire des Sciences de la Terre de l'École normale supérieure de Lyon
dirigé par Yanick RICARD[1] et Jean-Francois PINTON[2]

1. Laboratoire des Sciences de la Terre, UMR 5570 CNRS - ENS Lyon - UCB Lyon 1
2. Laboratoire de Physique, UMR 5672 CNRS - ENS Lyon

Résumé

Afin de comprendre comment l'énergie cinétique peut être convertie en énergie magnétique, plusieurs équipes à travers le monde travaillent à la réalisation d'expériences visant à faire croître un champ magnétique dans un fluide conducteur, en imposant un champ de vitesse. De tels systèmes ne se comportent comme des dynamos que lorsque le nombre de Reynolds magnétique R_m [3] dépasse une valeur critique.

Le but de mon travail est de réaliser un programme informatique permettant la détermination *a priori* du nombre de Reynolds magnétique critique, et de voir comment le champ de vitesse le modifie.

3. voir définition en 1.3

Table des matières

Introduction **5**

1 Effet dynamo : introduction théorique **6**
1.1 Le champ géomagnétique . . . 6
1.2 Équation de l'induction . . . 7
1.3 Discussion - Nombre de Reynolds magnétique . . . 7
1.4 Généralités sur les harmoniques sphériques . . . 8
1.4.1 Définition . . . 8
1.4.2 Propriété utile . . . 8
1.5 Formalisme poloïdal-toroïdal . . . 9
1.5.1 Cas d'un champ à divergence nulle . . . 9
1.5.2 Cas d'un vecteur à divergence non nulle . . . 10
1.5.3 Coordonnées du rotationnel d'un vecteur . . . 10
1.6 Projection de l'équation de l'induction . . . 11
1.7 Conditions aux limites . . . 11

2 Résolution numérique **12**
2.1 Algorithme . . . 12
2.1.1 Méthode des différences finies sur le rayon . . . 12
2.1.2 Intégration sur le temps . . . 13
2.2 Conversion spatial-spectral . . . 13
2.3 Modifications apportées . . . 14

3 Résultats - Interprétation **15**
3.1 Énergie magnétique - Champ magnétique . . . 15
3.1.1 Énergie magnétique . . . 15
3.1.2 Champ magnétique . . . 15
3.2 Champ de vitesse de J-F Pinton ; $R_m = 60$ . . . 16
3.2.1 Champ de vitesse imposé . . . 16
3.2.2 Évolution de l'énergie magnétique . . . 17
3.2.3 Champ magnétique . . . 18
3.3 Test de la détermination de R_m^c . . . 19
3.3.1 Principe . . . 19

3.3.2 Résultat - Évolution de l'énergie magnétique 20
3.3.3 Conclusion 21
3.4 Effet d'une rotation globale sur R_m^c 22
3.4.1 Contexte expérimental 22
3.4.2 Problème rencontré 23

Conclusion **25**

Bibliographie **26**

Table des figures

3.1 Carte du champ magnétique imposé 16
3.2 Carte du champ de vitesse imposé, pour $r = r_{max}/2$ 17
3.3 Taux de croissance pour $R_m = 60$ 18
3.4 Énergie magnétique pour $R_m = 60$ 19
3.5 Champ magnétique à la surface de la sphère après 2 temps diffusifs 20
3.6 Champ magnétique à la surface de la sphère, sans champ de forçage. 21
3.7 Évolution de l'énergie magnétique pour différents nombres de Reynolds magnétiques 22
3.8 Evolution du taux final en fonction du nombre de Reynolds magnétique . . . 23

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier M. Yanick Ricard de m'avoir accueilli au sein de son laboratoire, et d'avoir fait preuve d'une grande patience à mon égard. Les nombreuses séances de travail au tableau ont été riches en enseignement tant sur l'étude des dynamos que sur les méthodes de la recherche en général. Dans une atmosphère aussi détendue, mes deux mois de stage sont passés très vite, voire trop vite.

Je remercie également M. Jean-François Pinton qui, avec M. Philippe Odier, m'a toujours très bien accueilli dans la salle d'expérience de l'Équipe Dynamo, pour me faire voir “la vraie physique”. Cette interaction entre la théorie et l'expérience concrète a été très intéressante, et m'a beaucoup aidé à voir où je devais aller.

Je tiens aussi à remercier l'Équipe Géodynamo du Laboratoire de Géologie Interne et Tectonique de l'Observatoire de Grenoble, pour m'avoir accueilli une journée dans leur laboratoire. C'est au cours de cette visite que mon travail a beaucoup progressé, grâce au petit séminaire improvisé dans le gazon... Ma reconnaissance va tout particulièrement à M. Philippe Cardin, qui m'a donné son code de dynamo cinématique, et ainsi, fait faire une avancée très rapide dans mon stage.

Je remercie aussi Armel Martin, qui travaillait sur l'expérience de dynamo de Jean-François Pinton. J'ai eu avec Armel des échanges très intéressants au sujet de la dynamo. La confrontation du coté expérimental et du coté théorique a permis à chacun d'entre nous de mieux cerner le sujet et ses difficultés...

Enfin, je tiens à remercier Sébastien Lacour, pour son aide précieuse dans l'utilisation de LaTeX, et François Chamaraux pour le soutien apporté dans les moments difficiles, et dans la rédaction de ce rapport.

Introduction

L'idée de convertir l'énergie cinétique en énergie magnétique n'est pas récente. Dès le début du $20^{\text{ème}}$ siècle, des physiciens ont réfléchi à la façon de réaliser ce transfert. Si les descriptions théoriques affirment que cela est possible, les expérimentateurs, eux, ont plus de mal à mettre en évidence cet effet d'amplification de champ magnétique, plus connu sous le nom d' **effet dynamo**. La seule dynamo qui ait effectivement fonctionné est une dynamo solide, dont la réalisation n'a pu aboutir qu'en réfléchissant à la géométrie des courants induits, et à leur contrôle.

L'équipe Dynamo du laboratoire de Physique de l'École normale supérieure de Lyon travaille actuellement sur une expérience de dynamo à symétrie cylindrique. Malheureusement les résultats obtenus jusqu'à présent n'ont pas pu mettre en évidence la croissance d'un champ magnétique, et donc, d'un effet dynamo. Dans les conditions expérimentales actuelles, le nombre de Reynolds critique est trop élevé.

Mon travail a consisté à tester un autre champ de vitesse, incluant une rotation globale du montage et de voir si le nombre de Reynolds critique était abaissé. Il s'agit donc d'un travail préparatoire à une expérience ultérieure. Dans un premier temps, il a fallu que je comprenne le partie théorique et le formalisme, que je présenterais dans le chapitre 1. Ensuite, à partir du code de Philippe Cardin, j'ai développé un programme permettant de suivre l'évolution de l'énergie magnétique du système, et de calculer le champ magnétique induit (chapitre 2). Enfin, nous verrons dans le chapitre 3 une méthode pour trouver le nombre de Reynolds magnétique critique d'une expérience, et nous l'appliquerons à un cas particulier.

Chapitre 1

Effet dynamo : introduction théorique

L'effet dynamo résulte du couplage des équations de MAXWELL avec l'équation d'EULER de la mécanique des fluides. En les combinant, on peut obtenir l'interaction entre un fluide conducteur et un champ magnétique. Dans le cas qui m'intéresse ici, on suppose que l'action du champ sur le fluide est négligeable, de sorte que seule est prise en compte l'action de la vitesse sur le champ magnétique.

1.1 Le champ géomagnétique

Le champ planétaire a une intensité du même ordre de grandeur sur tout le globe, ce qui implique que son origine est très profonde. Comme le manteau et la graine ont une température supérieure à la température de CURIE, ils ne peuvent être magnétiques : ce sont donc des courants électriques qui sont à l'origine du champ.

Afin de voir quelle partie du globe contient ces courants, il faut regarder la conductivité des diverses couches.

Croûte supérieure	$10^{-4}\Omega^{-1}m^{-1}$
Croûte inférieure	$10^{-2} - 10^{-3}\Omega^{-1}m^{-1}$
Manteau inférieur	$100\Omega^{-1}m^{-1}$
Noyau	$10^{5}\Omega^{-1}m^{-1}$

Du tableau ci-dessous, on peut conclure que les seuls courants importants se trouvent dans le noyau. D'autre part, on peut montrer qu'en l'absence de couplage avec la matière, ces courants seraient amortis par effet JOULE en 10.000 ans. Or on trouve des roches aimantées bien plus âgées... Donc pour comprendre l'origine du champ magnétique terrestre, il faut avoir recours à la branche de la physique qui s'intéresse à de tels couplages, c'est-à-dire la magnétohydrodynamique. D'autre part, les inversions du champ géomagnétique, tous les cent mille ans environ, montrent que ce champ n'est pas statique, mais en évolution permanente.

1.2 Équation de l'induction

On considère une sphère conductrice de conductivité σ et de permittivité magnétique μ_0. Commençons par écrire l'équation de MAXWELL-AMPÈRE:

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.1}$$

On se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires: $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$. Le fluide étant supposé ohmique, de conductivité σ, on peut écrire la loi d'OHM dans le réferentiel lié au fluide:

$$\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}'. \tag{1.2}$$

Soit:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{1.3}$$

En insérant (1.3) dans (1.1), on obtient:

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0 \sigma \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{1.4}$$

En prenant le rotationnel de cette expression, on trouve, en utilisant

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = \frac{\partial B}{\partial t} \tag{1.5}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \tag{1.6}$$

l'équation de l'induction dans la sphère :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \mathbf{B}. \tag{1.7}$$

Le problème de la dynamo cinématique est donc de résoudre cette équation en connaissant le champ de vitesse (imposé par l'expérimentateur), et les conditions aux limites. Nous reviendrons plus loin sur ces conditions aux limites. Avant cela, nous allons discuter un peu ce que représente physiquement cette équation, puis introduire le formalisme mathématique adapté au traitement des problèmes à symétrie sphérique comme c'est le cas ici.

1.3 Discussion - Nombre de Reynolds magnétique

On considère une sphère de rayon R, et de diffusivité magnétique $\lambda = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$. On définit alors le nombre de Reynolds magnétique R_m par :

$$R_m = \frac{U_{max} R}{\lambda} \tag{1.8}$$

où U_{max} est la vitesse maximale de l'écoulement. On prend alors U_{max} comme unité du champ de vitesse, R comme dimension de longueur et le temps de diffusion magnétique[1] comme unité de temps ; l'équation de l'induction s'écrit alors :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = R_m \,\mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \Delta \mathbf{B} \tag{1.9}$$

Pour réaliser une expérience de dynamo cinématique, le plus important est de connaître le nombre de Reynolds magnétique critique R_m^c, au-delà duquel les fluctuation du champ magnétique peuvent croître. Il est important, avant de commencer la réalisation pratique de l'expérience de dynamo, de connaître un ordre de grandeur du nombre de R_m^c, afin par exemple d'adapter la puissance des moteurs qui créent le champ de vitesse.

1.4 Généralités sur les harmoniques sphériques

1.4.1 Définition

Les harmoniques sphériques sont un ensemble de fonctions complexes $Y_{lm}(\theta,\phi)$ définies sur la sphère. Elles sont définies pour $l = 0, 1, ..., +\infty$ et $m = -l, ..., +l$, par l'expression ci-dessous:

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = C_{lm} P_m^l(\theta,\phi) \mathrm{e}^{im\phi}$$

où P_m^l est le polynôme de LEGENDRE de degré m et d'ordre l. C_{lm} est une constante de normalisation.

Ainsi définies, les harmoniques sphériques forment un système orthonormé qui constitue une base des fonctions définies sur la sphère. Je donne ci-dessous les expressions de quelques harmoniques particulièrement utiles pour notre problème :

$$Y_{10}(\theta,\phi) = \sqrt{3}\cos\theta$$

$$Y_{20}(\theta,\phi) = \frac{\sqrt{5}}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

1.4.2 Propriété utile

Dans les différents calculs que j'ai dû mener, une propriété des harmoniques sphériques s'est révélée particulièrement intéressante :

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\phi^2} = l(l+1)Y_{lm}. \tag{1.10}$$

Ceci permet de calculer de façon simple le Laplacien d'une fonction mise sous la forme $F(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$:

$$\Delta[F(r)Y_{lm}(\theta,\phi)] = \frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^2}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{\mathrm{d}F(r)}{\mathrm{d}r}) - l(l+1)F(r)). \tag{1.11}$$

1. $\tau = \frac{R^2}{\lambda\gamma^2}$

1.5 Formalisme poloïdal-toroïdal

Il est d'usage en géophysique de décomposer les champs en utilisant le formalisme poloïdal-toroïdal. Je vais à présent en faire une rapide présentation.

1.5.1 Cas d'un champ à divergence nulle

Prenons l'exemple du champ magnétique. On peut l'écrire sous la forme:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B_T} + \mathbf{B_P} \tag{1.12}$$

$$= \mathbf{rot}(T\mathbf{r}) + \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}(P\mathbf{r}), \tag{1.13}$$

où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur exprimé en coordonnées sphériques. T et P sont les scalaires toroïdal et poloïdal. Explicitement on obtient :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}L^2(P) \\ \frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP)) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial\phi} \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP)) - \frac{\partial T}{\partial\theta} \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

avec L^2 opérateur Laplacien angulaire défini par :

$$L^2 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{1.15}$$

L'avantage de ce formalisme est que les scalaires toroïdal et poloïdal se décomposent simplement en harmoniques sphériques:

$$T = \sum_{l,m} c_{lm}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$$P = \sum_{l,m} b_{lm}(r)Y_{lm}(\theta,\phi).$$

On peut écrire:

$$\mathbf{B} = \sum_{lm} \mathbf{B_{lm}}$$

avec

$$\mathbf{B_{lm}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}l(l+1)b_{lm}Y_{lm} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rb_{lm})\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta} + c_{lm}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\phi} \\ -c_{lm}\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rb_{lm})\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\phi} \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

1.5.2 Cas d'un vecteur à divergence non nulle

On généralise la relation donnée plus haut:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} L^2(P) \\ \frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \theta} \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial S}{\partial \phi} - \frac{\partial T}{\partial \theta} \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

P est le scalaire poloïdal et S, le scalaire sphèroïdal. A partir de là, il est possible de décomposer à nouveau S et P sur la base des harmoniques sphériques.

1.5.3 Coordonnées du rotationnel d'un vecteur

Après la décomposition en harmoniques sphériques, on écrit $\mathbf{A}$ sous la forme:

$$\mathbf{A} = \sum_{l,m} \begin{pmatrix} a_{lm} Y_{lm} \\ b_{lm}\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} + c_{lm}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} \\ b_{lm}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} - c_{lm}\frac{\partial Y\{lm}{\partial \theta} \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

En utilisant l'expression du rotationnel en sphérique, on trouve avec un peu de soin et de patience:

$$\mathbf{rot\ A} = \sum_{l,m} \begin{pmatrix} a^r_{lm} Y_{lm} \\ b^r_{lm}\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} + c^r_{lm}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} \\ b^r_{lm}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} - c^r_{lm}\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

avec :

$$a^r_{lm} = l(l+1)\frac{c_{lm}}{r}, \tag{1.20}$$

$$b^r_{lm} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r c_{lm}), \tag{1.21}$$

$$c^r_{lm} = \frac{a_{lm}}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r b_{lm}). \tag{1.22}$$

De la même manière, on peut calculer la décomposition du **rot rot A**: si on note $a^{rr}_{lm}, b^{rr}_{lm}, c^{rr}_{lm}$ ses coefficients, on trouve:

$$a^{rr}_{lm} = \frac{l(l+1)a_{lm}}{r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r b_{lm}) \tag{1.23}$$

$$b^{rr}_{lm} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(a_{lm} - \frac{\partial}{\partial r}(r b_{lm})) \tag{1.24}$$

$$c^{rr}_{lm} = \frac{l(l+1)c_{lm}}{r^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r b_{lm}) \tag{1.25}$$

1.6 Projection de l'équation de l'induction

Afin de résoudre de trouver plus facilement l'évolution du champ magnétique sous l'effet du champ de vitesse, nous allons projeter l'équation de l'induction sur les harmoniques sphériques. Pour cela, introduisons les coefficients $(a_{lm}, b_{lml}, c_{lm})$ du champ magnétique et $(\alpha_{lm}, \beta_{lm}, \gamma_{lm})$, ceux du produit vectoriel $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. On obtient, à partir des résulats de la section précédente et en notant que $\Delta\mathbf{B} = -\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{B}$, les équations différentielles couplées sur les coefficients ci-dessous:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial a_{lm}}{\partial t} = R_m \frac{l(l+1)\gamma_{lm}}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}(a_{lm} - \frac{\partial}{\partial r}(rb_{lm})) \\ \frac{\partial b_{lm}}{\partial t} = \frac{R_m}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\gamma_{lm}) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(a_{lm} - \frac{\partial}{\partial r}(rb_{lm})) \\ \frac{\partial c_{lm}}{\partial t} = \frac{R_m}{r}(a_{lm} - \frac{\partial}{\partial r}(rb_{lm})) - \frac{l(l+1)c_{lm}}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rb_{lm}) \end{array} \right. \tag{1.26}$$

En utilisant $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$, les deux premières équations du système sont équivalentes. Le système à résoudre est donc:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial a_{lm}}{\partial t} = R_m \frac{l(l+1)\gamma_{lm}}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}(a_{lm} - \frac{\partial}{\partial r}(rb_{lm})) \\ \frac{\partial c_{lm}}{\partial t} = \frac{R_m}{r}(a_{lm} - \frac{\partial}{\partial r}(rb_{lm})) - \frac{l(l+1)c_{lm}}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rb_{lm}) \\ l(l+1)b_{lm} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_{lm}) \end{array} \right. \tag{1.27}$$

Ce système n'ayant pas de solution analytique connu, il faut le résoudre numériquement.

1.7 Conditions aux limites

La seule condition aux limites est à la limite externe de la sphère conductrice. On choisit ici le cas où la sphère de fluide conducteur est contenue dans un récipient dont les parois sont non conductrices. Sur le plan mathématique, cela revient à dire que le champ magnétique dérive d'un potentiel scalaire à l'extérieur de la sphère. Il nous reste à voir comment cela se traduit comme condition sur les coefficients poloïdal et toroïdal.

Pour cela, il suffit de se rappeler que $\mathbf{j} = \mathbf{rot}\,\mathbf{B}$. On a alors :

$$\mathbf{j} = \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}(T\mathbf{r}) + \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}(P\mathbf{r}) \tag{1.28}$$

$$= \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}(T\mathbf{r}) - \mathbf{rot}(\Delta P\mathbf{r}). \tag{1.29}$$

D'où, par définition, on trouve:

$$T_j = -\Delta P_B \tag{1.30}$$

$$P_j = T_B \tag{1.31}$$

A l'extérieur de la sphère $\mathbf{j} = \mathbf{0}$, ce qui donne

$$\Delta P = T = 0 \text{ pour } r \geq R \tag{1.32}$$

où R est le rayon de la sphère. Au centre, on choisit $P = T = 0$.

On pourrait concevoir un modèle un peu plus réaliste, dans lequel la paroi serait conductrice. J'avais initialement prévu de traiter ce problème, mais le temps m'a manqué ...

La mise en équation du problème est à présent terminée. Il reste à trouver une méthode adaptée pour résoudre informatiquement le systeme (1.19). C'est le sujet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Résolution numérique

Je vais décrire dans cette partie la méthode utilisée, ainsi que les composantes les plus importantes du programme. Le code complet, écrit en Fortran 77, ne sera pas présenté, les détails de la programmation n'étant pas la partie intéressante du travail. Nous nous limiterons à une description des techniques numériques mises en jeu.

2.1 Algorithme

2.1.1 Méthode des différences finies sur le rayon

On constate que l'équation de la diffusion comporte à la fois des dérivées spatiales et des dérivées temporelles. Les deux ne sont pas traitées de la même manière. Commencons par voir comment traiter les parties spatiales.

Dans son code, Philippe Cardin adopte une approche par différences finies le long du rayon. Le problème est que nous devons faire un calcul au second ordre pour voir la dynamo, alors que la condition au bord est du premier ordre : cela impose de calculer plus précisement ce qui se passe au bord, et donc de ne pas avoir un pas constant. Nous fixons le nombre de coquilles sphériques nr, la coquille à partir de laquelle le pas va varier de nx, et le rapport entre le plus petit intervalle et le plus grand, $taux$. Il est alors possible de créer nr coquilles sphériques situées en les $r(ir), ir = 1, ..., nr$. On choisit $r(0) = 0$ et $r(nr) = 1$ [1].
La méthode des différences finies consistent à remplacer les dérivées premières et secondes par des taux d'accroissement, en utilisant la formule de Lagrange. En développant au second ordre, on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial r}(ir) = \frac{dr^2(ir)[F(ir+1) - F(ir)] - dr^2(ir+1)[F(ir-1) + F(ir)]}{dr(ir+1)dr(ir)[dr(ir+1) + dr(ir)]} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(ir) = 2\frac{dr(ir)[F(ir+1) - F(ir)] + dr(ir+1)[F(ir-1) - F(ir)]}{dr(ir+1)dr(ir)[dr(ir+1) + dr(ir)]} \tag{2.2}$$

L'expression du Laplacien se dérive immédiatement grâce à l'équation (1.11).

1. Toutes les dimensions ont été rapportées au rayon de la sphère

2.1.2 Intégration sur le temps

Pour l'intégration sur le temps, on utilise une adaptation de la méthode de CRANCK-NICHOLSON : on est contraint à cette adaptation par la présence du rotationnel, qui ne peut être exprimé de manière implicite. Dans ce qui suit, j'écrirai f au lieu des coefficients p_{lm} et t_{lm}, et $Rot(t)$ le coefficient poloïdal ou toroïdal de $\mathbf{rot}\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ pris en t. Le schéma d'intégration suit l'équation suivante :

$$f(t+dt) = f(t) + dt[Rot(t) + \frac{1}{2}\Delta f(t) + \frac{1}{2}\Delta f(t+dt)] \tag{2.3}$$

Ce qui donne en différences finies:

$$a_i f_{i-1}(t+dt) + b_i f_i t + dt + c_i f_{i+1}(t+dt) = d_i(t) \tag{2.4}$$

$$\tag{2.5}$$

$$a_i = 2\frac{dr(i+1)}{den(i)}(\frac{dr(i+1)}{r(i)} - 1) \tag{2.6}$$

$$b_i = 2\frac{1}{den(i)}[dr(i) + dr(i+1) + \frac{dr^2(i)}{r(i)} - \frac{dr^2(i+1)}{r(i)}] + \frac{l(l+1)}{r^2(i)} + \frac{2}{dt} \tag{2.7}$$

$$c_i = -2\frac{dr(i)}{den(i)}(\frac{dr(i)}{r(i)} + 1) \tag{2.8}$$

$$d_i = \frac{2}{dt}f_i(t) + \Delta f_i(t) + 2Rot(t) \tag{2.9}$$

$$den(i) = dr(ir+1)dr(ir)[dr(ir+1) + dr(ir)] \tag{2.10}$$

Pour $i = 1$ on a choisi le poloïdal et le toroïdal nuls, ce qui donne $a_1 = 0$. Pour $i = n-1$, le poloïdal est nul sur le sphère extérieure ce qui donne $c_{n-1} = 0$. Enfin la condition sur le poloïdal impose

$$b_{n-1} = 2\frac{1}{den(n-1)}[dr(n-1) + dr(n) + \frac{dr^2(n-1)}{r(n-1)} - \frac{dr^2(n)}{r(n-1)}] \tag{2.11}$$

$$+\frac{l(l+1)}{r^2(n-1)} + \frac{2}{dt} - [2\frac{dr(i)}{den(i)}(\frac{dr(i)}{r(i)} + 1)][1 - (l+1)dr(n)] \tag{2.12}$$

C'est à partir de ces éléments d'analyse numérique que le programme mis en annexe calcule l'évolution dans le temps du champ magnétique à partir du champ de vitesse imposé. Un élément important dans le programme est le passage rapide du domaine spatial au domaine spectral ; les subroutines utilisées sont décrites dans la section suivante.

2.2 Conversion spatial-spectral

Les équations (1.21) sont issues de la projection de l'équation de la diffusion sur les harmoniques sphériques. Cette décomposition, ainsi que la recomposition du champ spatial se fait grâce à des subroutines créées par Yanick RICARD, et modifiées par Philippe CARDIN.

Pour que la décomposition en harmoniques sphériques soit précise, il est astucieux de décomposer et recomposer en des points dits “de GAUSS”, où l'intégrale de décomposition est rigoureusement égale à une somme discrête sur les points de GAUSS. Ces points ainsi que leur poids sont calculés par la subroutine *Gauss*.

Je ne vais pas rentrer dans le fonctionnement détaillé du programme : ce serait long et sans aucun intérêt physique[2] : je me contenterais d'une rapide description des principales subroutines.

- spat_spec(data,y,isigne) : cette subroutine permet le passage du champ scalaire data(n_{lat}, n_{long}) défini sur une sphère à ces coefficients complexes d'harmoniques sphériques y(l_{max}), pour isigne=1. Pour isigne=-1, c'est l'opération inverse.

- phys_spec(Brr,Brt,Brp,isigne) : permet le passage du champ magnétique défini sur la boule en ses coefficients complexes d'harmoniques sphériques yBpr(l_{mmax}, n_r) et yBtr(l_{mmax}, n_r) pour isigne=1. C'est l'inverse si isigne=-1.

Les autres subroutines présentées dans le programme ne seront pas décrites ici, sauf energie(yBpr,yBtr,energ), qui, à partir des coefficients toroïdal et poloïdal de **B**, calcule energ, énergie magnétique du système. Nous verrons dans le chapitre 3 l'intérêt de ce calcul.

2.3 Modifications apportées

Pour résoudre mon problème, il a fallu modifier légèrement le code. Dans un premier temps j'ai ajouté un champ permanent, qui devait correspondre à un champ imposé par les expérimentateurs dans l'expérience de Jean-Francois PINTON et Philippe ODIER. Le champ est rentré dans l'espace physique dès le début du programme et stocké dans un fichier, afin d'être dessiner ultérieure ment : on pourra ainsi voir comment le champ initial est affecté par le champ de vitesse.

D'autre part, nous nous proposions de déterminer le nombre de Reynolds magnétique critique. Pour cela, il faut prendre plusieurs valeurs de R_m, laisser évoluer dans le temps, et voir comment se comporte le système pour les différents nombres de Reynolds. Pour cela, j'ai ajouté une boucle globale : on lit au début une valeur du nombre de Reynolds, et le programme calcule l'évolution du système pour ce nombre, et pour neuf autres valeurs, en augmentant de 5 à chaque itérations.

Une part importante de mon temps a été consacrée à l'exploitation graphiques des résultats de mon programme. C'est assez frustrant d'avoir un programme qui marche, et de ne pas pouvoir voir les résultats comme on le souhaite ... J'ai utilisé deux logiciels graphiques. XMGR a été très utile pour les tracés de l'évolution de l'énergie magnétique et du taux d'évolution. Pour les cartes des champs (magnétiques et de vitesse), j'ai eu recours à GMT. Ce logiciel, très utilisé par les géophysiciens, permet d'otenir des cartes en projection stéréographique de sphères : il est, hélas, assez difficile à utiliser ...

L'essentiel du traitement numérique a été décrit. Après des temps de calcul souvent très grand, j'ai obtenu des résultats intéressants, décrits dans le chapitre suivant.

2. Bien que cela ait occupé une bonne partie de mon temps ...

Chapitre 3

Résultats - Interprétation

3.1 Énergie magnétique - Champ magnétique

Je vais commencer par décrire les deux grandeurs physiques intéréssantes pour mon travail.

3.1.1 Énergie magnétique

L'énergie magnétique du systéme est définie par la relation :

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{sphère}} \mathbf{B}^2 \mathrm{d}v \tag{3.1}$$

Cette grandeur est trés intéressante, car c'est son évolution qui permettra de dire si il y a ou non un effet dynamo. Il faut en effet se rappeler que cet effet peut se résumer par la conversion de l'énergie cinétique fournie au système par l'expérimentateur, en énergie magnétique. Donc, si au cours de son évolution, le système tend à gagner sans cesse de l'énergie (c'est-à-dire si le taux de variation de lénergie diverge, ou tend vers une constante positive), on peut affirmer que l'effet dynamo a démarré, et qu'on est donc au-dessus du nombre de Reynolds magnétique critique. On comprend alors l'intérêt de la subroutine energie présentée rapidement au chapitre précédent.

3.1.2 Champ magnétique

L'autre grandeur intéressante est bien évidemment le champ magnétique lui-même. Il est en particulier très intéressant de voir comment le champ initial est perturbé par le phénomène d'induction.

Dans les calculs, le champ imposé est pris parallèle à l'axe de rotation de la sphère, et de module 1T. Il correspond au champ imposé par l'équipe Dynamo de l'ENS-Lyon, dans leur expérience en symétrie cylindrique. La carte 3.1 donne l'allure de ce champ, à la surface. La partie en dégradé correspond au module de la composante radiale de **B**, et les flèches, à des vecteurs tangents à la sphère, de composantes $\begin{pmatrix} B_\theta \\ B_\phi \end{pmatrix}$. Ces conventions seront utilisées pour tous les champ de vecteurs.

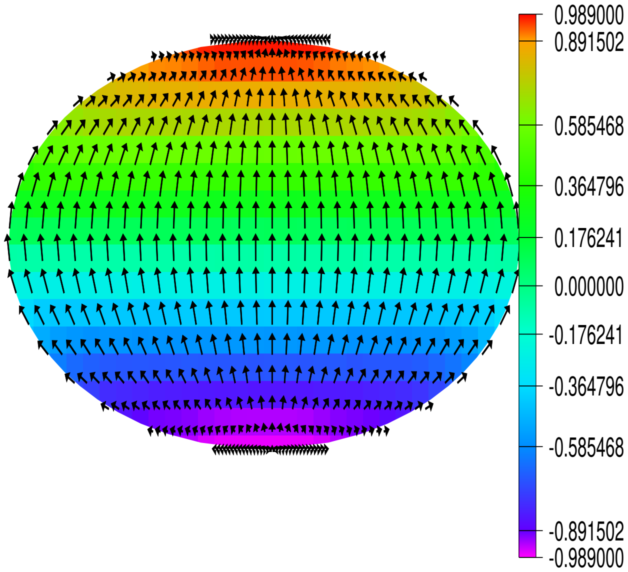

FIG. 3.1: *Carte du champ magnétique imposé*

3.2 Champ de vitesse de J-F Pinton ; $R_m = 60$

3.2.1 Champ de vitesse imposé

Dans un premier temps, je me suis fixé un nombre de Reynolds magnétique, $R_m = 60$, et un champ de vitesse correspondant en géométrie sphérique, au champ de vitesse imposé par les moteurs dans l'expérience de Jean-Francois Pinton. Mon but était simplement de vérifier le bon fonctionnement de mon programme.

La figure 3.2 représente, avec les conventions déjà données, le champ de vitesse à la surface de la sphère.

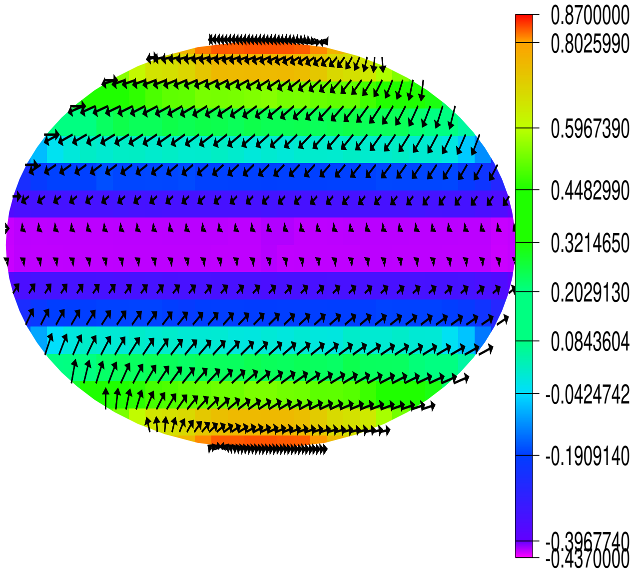

FIG. 3.2: *Carte du champ de vitesse imposé, pour $r = r_{max}/2$*

Le champ de vitesse est défini par :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \sin(\pi r)(1 - 3\cos^2\theta) \\ -\sin\theta\cos\theta(2\sin(\pi r) + \pi r\cos(\pi r)) \\ -\frac{r}{\epsilon}\sin(\pi r)\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

$$\epsilon = 0.14 \tag{3.3}$$

Il se compose d'une rotation différentielle et d'une recirculation. La valeur du coefficient ϵ a été choisie à partir de l'article de DUDLEY & JAMES [1], comme étant la valeur optimale de recirculation.

3.2.2 Évolution de l'énergie magnétique

L'énergie magnétique est enregistrée au fur et à mesure par le programme dans un fichier, qui contient aussi le taux de variation. Les résultats obtenus après dix mille itérations sont reproduits sur les figures 3.3 et 3.4, où le temps est gradué en temps diffusif.

On constate que l'énergie magnétique croît trés rapidement jusqu'à 0.5 temps diffusif, après quoi elle passe par un long palier, jusqu'à 1.2 temps diffusif. Ensuite, elle recommence à croître régulièrement. On retrouve ce comportement dans l'évolution du taux de croissance, qui au-delà de 1.2 temps diffusif, ne cesse d'augmenter. On peut donc affirmer que, dans

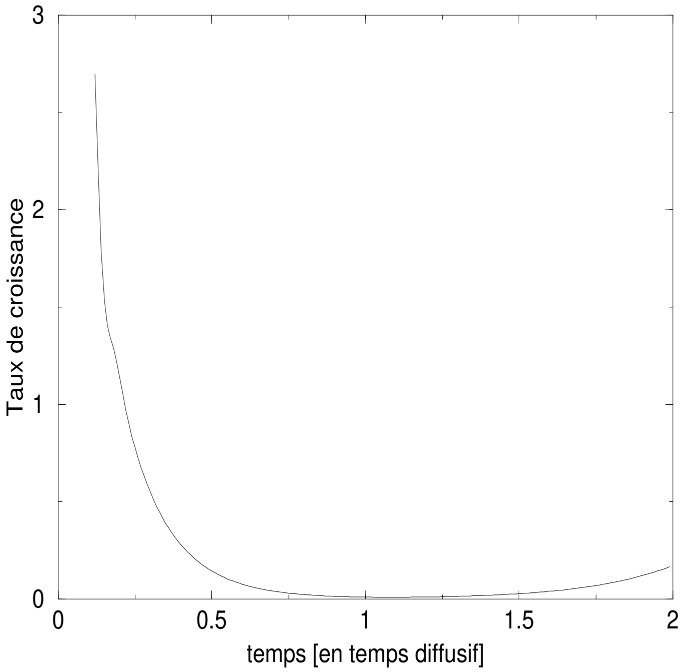

FIG. 3.3: *Taux de croissance pour $R_m = 60$*

cette configuration, on trouve la trace d'un effet dynamo, qui commence à se manifester pour des temps caractéristiques d'évolution supérieurs à un temps diffusif.

3.2.3 Champ magnétique

Nous allons à présent voir comment le champ magnétique a été affecté par l'induction. C'est ce que montre la carte 3.5.

Le champ magnétique obtenu est très différent de celui imposé. Sa géométrie est assez complexe, de sorte qu'on ne peut pas l'analyser facilement pour comprendre le mécanisme de la dynamo, en particulier comment se fait le couplage entre la vitesse et le champ magnétique.

La question que l'on peut se poser est : ce champ induit est -il suffisamment fort pour s'autoentretenir, voire pour continuer à croître ? Pour le savoir, j'ai laissé le système évolué encore un peu avec le champ imposé, puis je l'ai coupé. Après un court temps où l'énergie magnétique décroît (régime transitoire), elle recommence à croître. Le champ induit devient donc "autonome", comme on le voit sur la carte 3.6.

En fait, nous nous attendions à voir l'effet dynamo, car la valeur du nombre de Reynolds magnétique utilisée correspond à une valeur supérieure au Reynolds critique donnée par DUDLEY & JAMES.. Cela permet de bien vérifier que le programme donne le bon comportement : il s'agissait donc de la première phase du test.

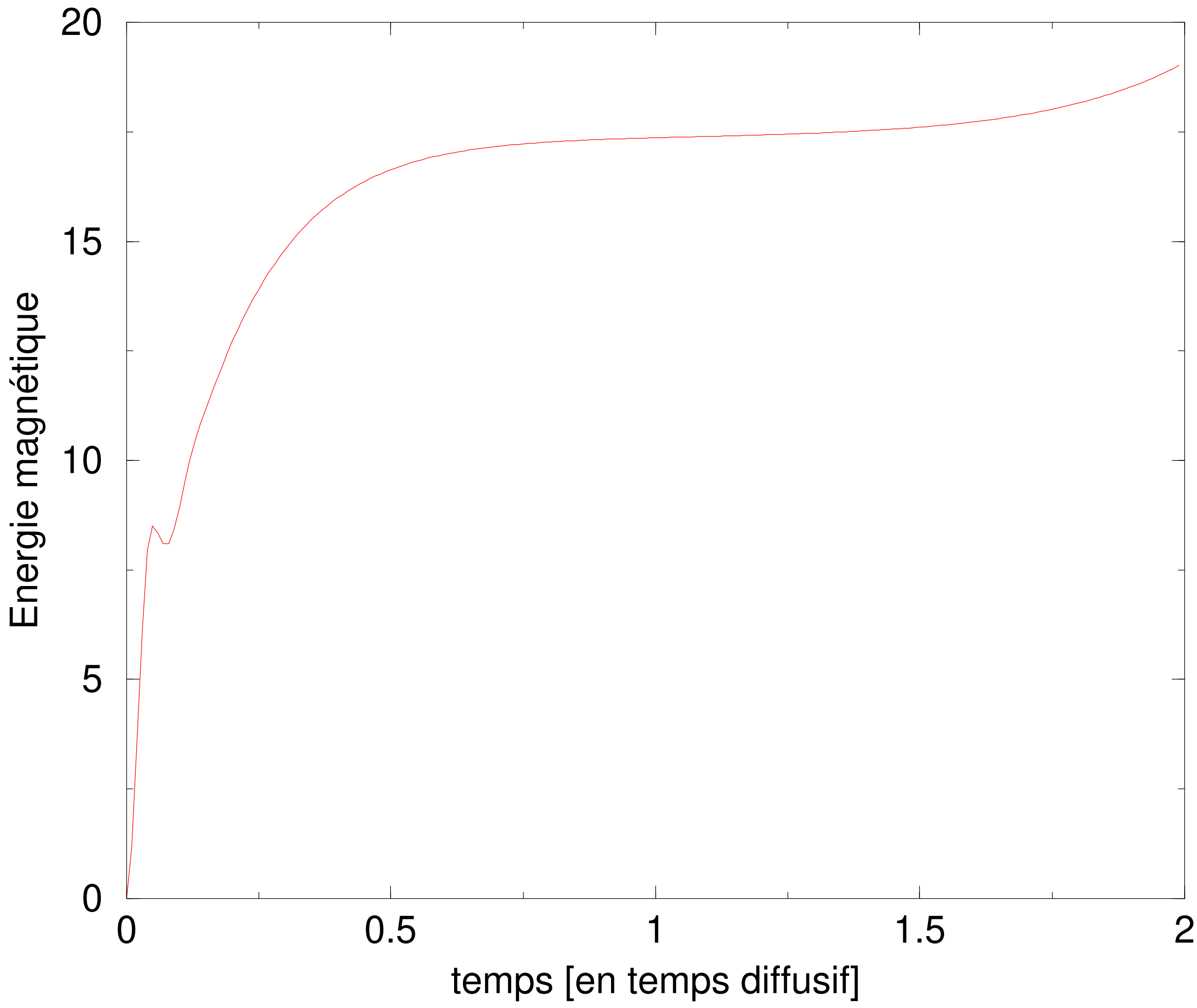

FIG. 3.4: *Énergie magnétique pour* $R_m = 60$

3.3 Test de la détermination de R_m^c

Il s'agit à présent d'effectuer un test de détermination du nombre de Reynolds critique. En partant de la configuration précédente, est-il possible d'estimer R_m^c au voisinage de 50 ?

3.3.1 Principe

Le principe de la méthode est simple : on regarde l'évolution de l'énergie magnétique. Si elle sature, il n'y a pas dynamo, si elle diverge, alors il y a dynamo. Le nombre de Reynolds critique est le nombre qui fait la frontière entre les deux comportements. Le problème qui se

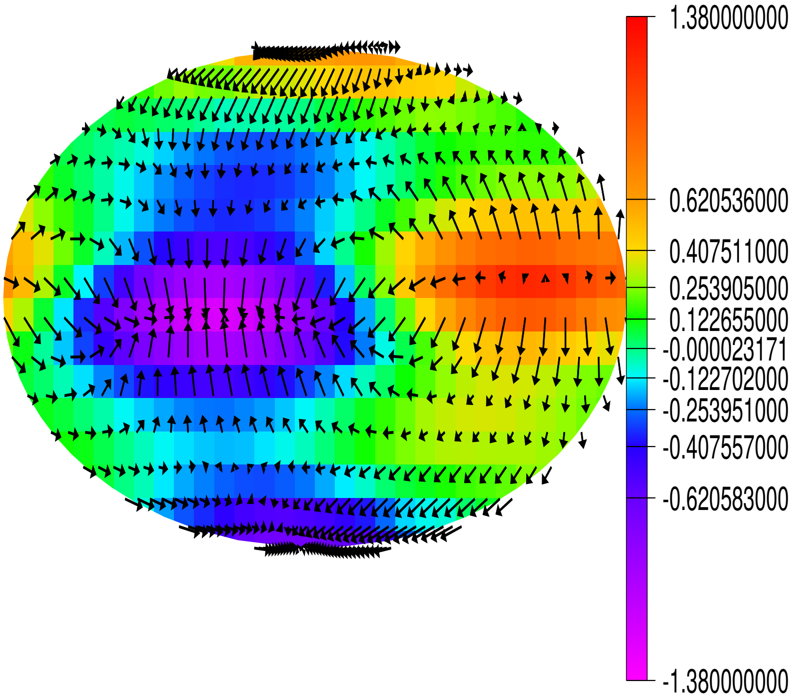

FIG. 3.5: *Champ magnétique à la surface de la sphère après 2 temps diffusifs*

pose est le temps de calcul.

Comme ce qui nous intéresse ce n'est pas l'évolution précise de l'énergie magnétique, mais son comportement au-delà de deux temps diffusifs, on peut se permettre d'augmenter le pas de temps. Ainsi, au bout d'un nombre "raisonnable" d'itérations, on atteint deux temps diffusifs. Malheureusement, la méthode de résolution adoptée ne tolère pas un pas aussi grand, et diverge... J'ai donc choisi d'effectuer 10000 itérations de pas 2.10^{-4} par nombre de Reynolds, pour 10 valeurs de R_m comprises entre 40 et 85. J'obtiens en sortie dix fichiers contenant l'évolution de l'énergie pour chacun des nombre de Reynolds magnétique.

3.3.2 Résultat - Évolution de l'énergie magnétique

La figure 3.7 regroupe les évolutions obtenues pour chacun des nombres de Reynolds magnétiques.

On constate que le comportement de l'énergie est bien différent selon que le nombre de

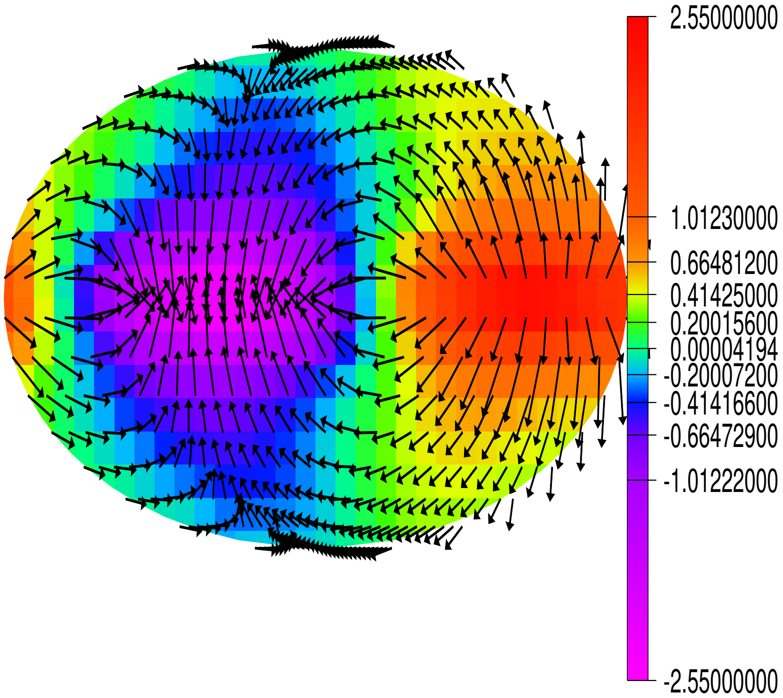

FIG. 3.6: *Champ magnétique à la surface de la sphère, sans champ de forçage.*

Reynolds est au-dessous ou au-dessus de la valeur 50 : on observe un croissance de l'énergie magnétique pour des nombre de Reynolds magnétiques supérieurs à 50. La figure 3.8 donne le taux de croissance final en fonction du nombre de Reynolds magnétique. La valeur critique est celle qui correspond à un taux final de croissance nul : on trouve de l'ordre de 51. On a donc bien retrouver numériquement la valeur de R_m^c donnée dans l'article de DUDLEY & JAMES .

3.3.3 Conclusion

Pour clore cette partie, nous pouvons dire que le programme permet de déterminer un encadrement du nombre de Reynolds critique d'un système. La seule limite à la précision est le temps de calcul, qui peut très vite devenir considérable. Il y a sans doute des possibilités d'optimisation, que je n'ai pas essayer de chercher.

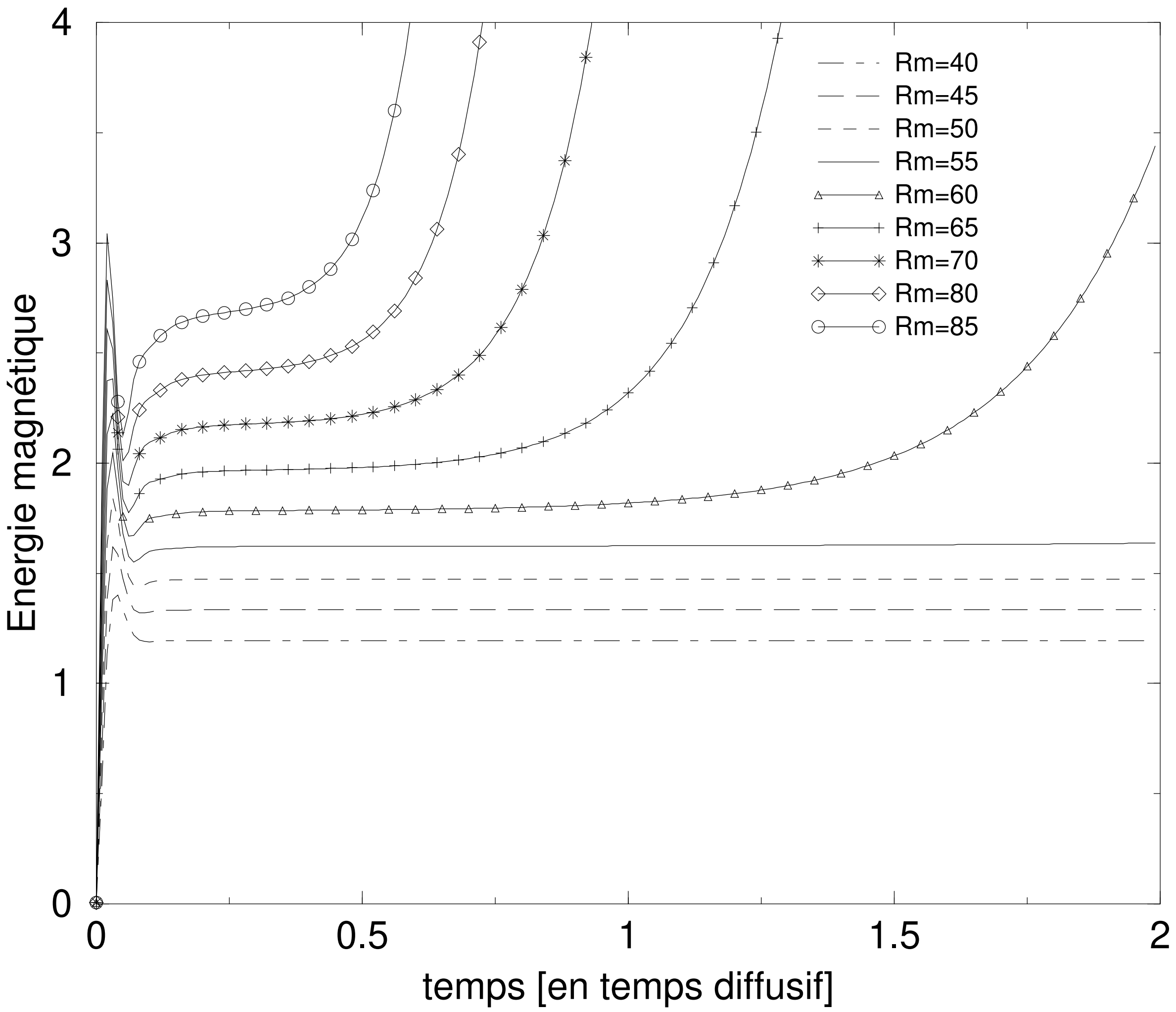

FIG. 3.7: *Évolution de l'énergie magnétique pour différents nombres de Reynolds magnétiques*

3.4 Effet d'une rotation globale sur R_m^c

3.4.1 Contexte expérimental

Au laboratoire de Physique de l'École normale, un dispositif d'étude de la dynamo est déja en place. Il ne permet pas d'observer réellement un effet d'amplification du champ, mais on décèle toutefois des phénomênes précurseurs. Un projet sur le point d'aboutir consiste à fixer le montage existant sur un plateau tournant, afin de rajouter une rotation globale au champ de vitesse imposé par les moteurs. On se pose la question de savoir si cette rotation globale va abaisser le nombre de Reynolds critique, et ainsi permettre de se rapprocher un peu de l'effet dynamo. On cherche aussi à déterminer la valeur optimale de cette rotation

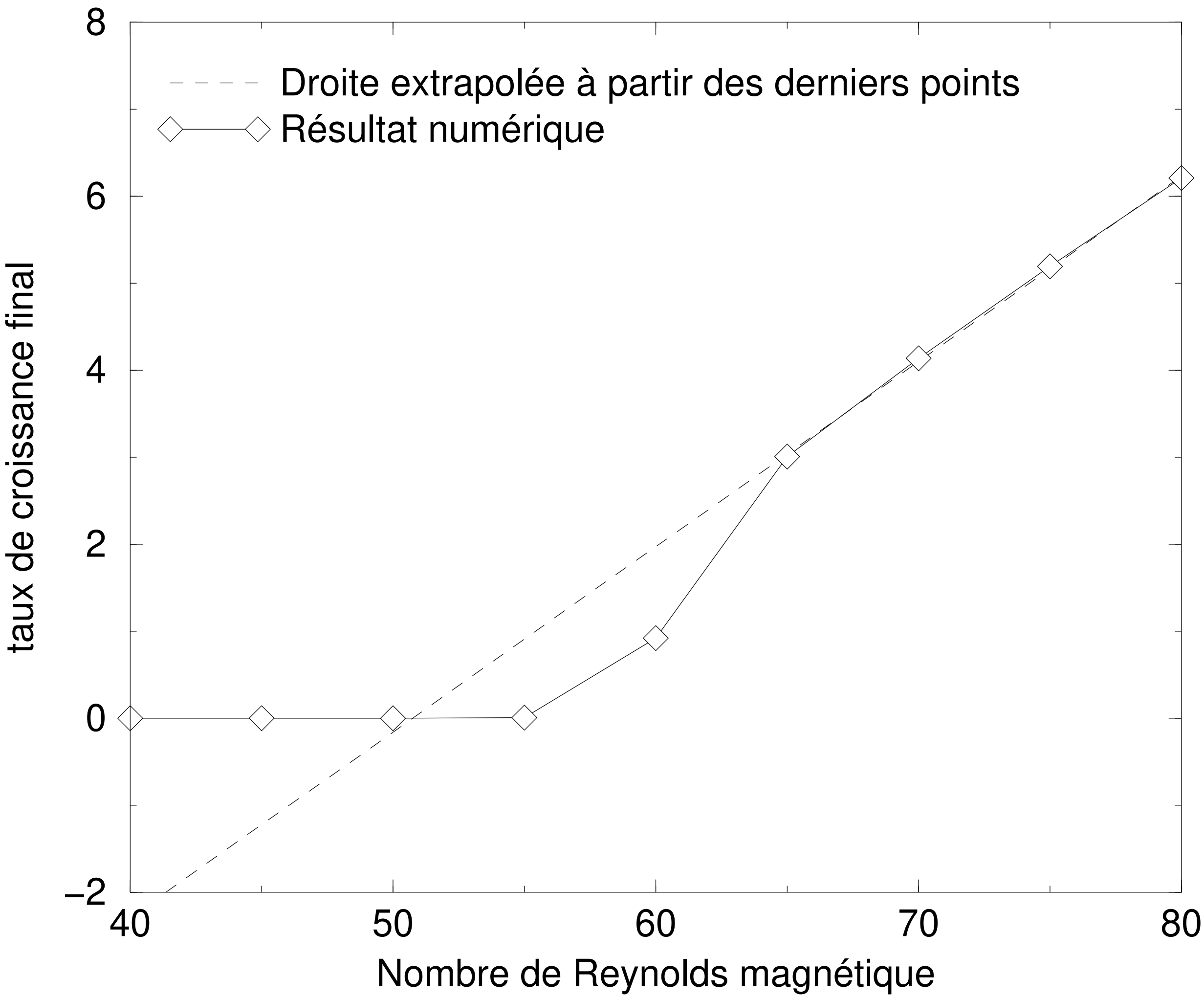

FIG. 3.8: *Evolution du taux final en fonction du nombre de Reynolds magnétique*

globale. C'est dans ce cadre que mon travail prend tout son sens : guider les expérimentateurs, afin qu'ils puissent obtenir le meilleur de leur montage.

3.4.2 Problème rencontré

La seule modification à apporter au programme par rapport au cas précédent se trouve dans le champ de vitesse. On ajoute un composante constante suivant e_ϕ, de module η. On obtient alors le champ de vitesse:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \sin(\pi r)(1 - 3\cos^2\theta) \\ -\sin\theta\cos\theta(2\sin(\pi r) + \pi r\cos(\pi r)) \\ -\frac{r}{\epsilon}\sin(\pi r)\cos\theta\sin\theta + r\sin(\theta)\eta \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

$$\epsilon = 0.14 \tag{3.5}$$

$$\eta = 1 \tag{3.6}$$

La simulation numérique montre que le nombre de Reynolds magnétique est augmenté. En fait, on peut penser que la rotation globale telle que je l'ai introduite dans le champ de vitesse ne change pas le nombre de Reynolds magnétique. L'élévation observée semble due à la définition choisie du Reynolds magnétique. Pour voir une modification de R_m, il faudrait introduire un cisaillement supplémentaire, par exemple en imposant une condition de vitesse nulle à la surface. Le problème n'est donc pas encore résolu pour l'instant.

Au demeurant, nous disposons d'un outil assez simple d'emploi, permettant de déterminer *a priori* un ordre de grandeur du nombre de Reynolds magnétique, pour un champ de vitesse donné.

Conclusion

L'objectif de mon stage était initialement d'étudier l'influence des conditions aux limites (récipient plus ou moins conducteur), et de trouver une méthode pour déterminer le nombre de Reynolds critique. L'ampleur de la tâche s'est révélée bien supérieure à ce qui était prévue ! Mais cela n'a en rien diminué l'intérêt du sujet, bien au contraire. Au final, seule la détermination du Reynolds critique a été menée à terme, et encore de justesse.

Pour ce qui est des perspectives d'étude sur ce sujet, elles sont nombreuses et très variées : étude des conditions aux limites, recherche de la rotation globale optimale, étude de la géométrie des courants induits au sein de la sphère. Tout ceci se situe dans le domaine des dynamos cinématiques. De nombreuses équipes travaillent aussi actuellement sur des dynamos globales, où l'influence du champ magnétique sur le champ de vitesse est prise en compte. Ces dynamos sont très intéressantes, car correspondent à ce qui se passe dans la Terre. De telles études nécessitent une connaissance précise des interactions, et des moyens de calcul considérables.

L'étude de l'effet dynamo est aussi très active sur le plan expérimental. A l'étranger, deux expériences sont déjà en cours de réalisation, et devraient donner les premières preuves expérimentales d'ici l'an prochain. La France n'est pas en reste dans ce domaine, avec essentiellement deux équipes: l'équipe des physiciens de l'École normale supérieure de Lyon, et celle des géophysiciens de l'Observatoire de Grenoble. La première équipe développe le projet "Von Karmàn Sodium", consistant en un cylindre rempli de 50 litres de sodium liquide, entraîné par de puissants moteurs. La seconde travaille sur des expériences de magnéto-convection dans une sphère de gallium en rotation rapide.

Personnellement, ce stage m'aura permis de découvrir la vie d'un laboratoire de recherche de l'intérieur : cela n'a fait que renforcer mon envie de me consacrer à la recherche. Il est vrai que cela prend beaucoup de temps, que c'est un investissement personnel important, qu'il y a des moments de découragement ; mais la satisfaction que l'on éprouve devant un résultat nouveau est telle que les inconvénients sont vite oubliés ! Ces deux mois de stage m'ont aussi permis de découvrir un domaine de la physique qui m'était inconnu auparavant, la géophysique. A l'intersection de plusieurs domaines de la physique, elle nécessite des connaissances vastes et de la polyvalence.

Bibliographie

[1] M. L. Dudley, R.W. James. Time-dependent kinematic dynamos with stationnary flows, *Proc. R. Soc. Lond.*, A**425**,407-429, 1989.

[2] P.Odier, J.-F. Pinton, S. Fauve Advection of a magnetic field by a turbulent swirlinfg flow, *Physical Review E*,vol. **58**, No. 6, pp 7397-7401, 1998.

[3] D. Brito Approches expérimentales et théoriques de la dynamique du noyau terrestre, *Thèse de Doctorat soutenue le 6 Janvier 1998, Département Terre-Atmosphère-Océan, École normale supérieure* .

[4] L. Lliboutry, Géophysique et géologie, *Masson*, 1998.

[5] W.H Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, Numerical recipies, the art of scientific computing, *Cambridge University Press*, 1986.

[6] D.Brito, P.Cardin, D.Jault, H.-C Nataf, Dynamo expérimentale à vocation géophysique, *demande de financement*, décembre 1998.

[7] Courant, Hilbert, Methods of Mathematical Physics, *Wiley Classicals Library*, 1962.

[8] J.Honerhamp, H.Römer, Theoretical Physics : a classical approch, *Springer-Verlag*, 1993.

[9] H.-C Nataf, Origine du champ magnétique terrestre, *Cours D.E.A. "Mécanique des milieux géophysiques et Environnement"*, Université Joseph Fourier.

[10] P.H. Roberts, T.H. Jensen, Homogeneous dynamos : theory and practice, *Phys. Fluids N* ,**5** (7), July 1993.

[11] A. Herzenberg, F.J. Lowes, Electromagnetic induction in rotating conductors, May 1957.

[12] Jackson, Classical Electrodynamics, *Wiley & Sons.*